

## 4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

### 4.1 Общие сведения

Уравнения, необходимые для расчетов процессов, можно получить на основе теоретического анализа. Чаще всего выполнение этой задачи сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений на основе общих законов физики, химии и т. д.

Многие процессы химической технологии характеризуются большим числом переменных, сложны в описании. Поэтому часто существует возможность дать лишь математическую формулировку задачи. Полученные дифференциальные уравнения невозможно решить на основе существующего математического аппарата (например, уравнение Навье-Стокса). Причем зачастую протекание одних процессов (массообменных) осложнено другими (теплообменными). Поэтому для некоторых процессов не удастся даже составить корректные дифференциальные уравнения, т. е. теоретический вывод расчетных зависимостей крайне затруднен или даже невозможен. В таких случаях прибегают к экспериментальному исследованию процессов с последующей обработкой опытных данных и получением эмпирических уравнений. Однако эти уравнения носят частный характер, их можно использовать только для условий, в которых получены экспериментальные данные.

Более эффективна экспериментальная работа, которая позволяет обобщать результаты опытов и распространять их на широкий круг явлений, подобных изученному. Это возможно при обработке опытных данных с использованием методов теории подобия.

Теория подобия – метод научного обобщения результатов эксперимента. Применение ее позволяет проводить опыты на значительно меньших моделях, исключая использование вредных веществ и жестких условий (высокие температуры, давления и т. п.). Методы теории подобия лежат в основе масштабирования и моделирования процессов.

### 4.2 Условия подобия

Один из основных принципов теории подобия – выделения из класса явлений группы подобных явлений. Подобными называют явления, для которых постоянны отношения характеризующих их сходственных величин.

Отношение сходственных величин у натурального объекта и модели называется константами подобия  $K$ . При изменении масштаба модели изменяется значение  $K$ , следовательно, оно не является однозначным параметром подобия.

Инварианты подобия  $i$  выражают безразмерные соотношения каких-либо двух характеристик одного объекта, которое равно отношению сходственных характеристик другого объекта, если эти объекты подобны. Инварианты подобия безразмерны, т. е. для их получения берут одинаковые по физическому смыслу характеристики. В отличие от констант подобия  $K$ , инварианты подобия  $i$  не зависят от масштаба подобных систем.

Инварианты подобия, выраженные отношением двух однородных физических величин, называются симплексами.

Если инвариант подобия выражается комплексами разнородных величин, то их называют критериями подобия.

Критерии подобия всегда имеют физический смысл, являются мерой соотношения между двумя эффектами, существенными для рассматриваемого процесса. Критерии подобия обладают всеми свойствами инвариантов. Симплексы и критерии подобия, называют обобщенными переменными. Их получают при преобразовании дифференциальных уравнений, а также методом анализа размерностей.

### 4.3 Теоремы подобия

Основные положения теории подобия обобщаются тремя теоремами подобия.

Первая теорема (Ньютона-Бертрана): подобные между собой системы имеют одинаковые критерии подобия.

Теорема указывает, какие величины следует варьировать при проведении опытов и учитывать при обобщении их результатов.

Вторая теорема (Бэкингема-Федермана): любая зависимость между переменными, характеризующая какое-либо явление, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия, составленными из этих переменных.

Теорема указывает, как необходимо обрабатывать опытные данные. Критерии подобия, составленные только из величин, входящих в условия однозначности, называют определяющими. В них входят только те величины, которые взяты из дополнительных уравнений, позволяющих решить дифференциальные уравнения для частного случая. Определяющие критерии выполняют роль аргументов в критериальных зависимостях, описывающих явление. Определяемыми называют критерии, включающие величины, не дающие процессу, явлению однозначной характеристики. Они выполняют роль функции в критериальных зависимостях.

Третья теорема (Кирпичева-Гухмана): явления подобны, если их определяющие критерии численно равны (описываются одними дифференциальными уравнениями и имеют подобные условия однозначности).

#### 4.4 Гидродинамическое подобие

Критерии гидродинамического подобия получают из дифференциального уравнения движения вязкой жидкости Навье-Стокса:

– критерий гомохронности (учитывает неустановившийся характер движения жидкости)

$$Ho = \frac{w\tau}{l}; \quad (4.1)$$

– критерий Фруда (характеризует соотношение сил инерции и тяжести в потоке)

$$Fr = \frac{w^2}{gl}; \quad (4.2)$$

– критерий Эйлера (характеризует соотношение сил, вызванных перепадом статического давления, к силам инерции в потоке жидкости)

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}; \quad (4.3)$$

– критерий Рейнольдса (характеризует соотношение сил инерции к силам вязкостного трения в потоке)

$$Re = \frac{wl\rho}{\mu}; \quad (4.4)$$

где  $w$  – скорость жидкости, м/с;

$\tau$  – время, с;

$l$  – характерный размер, м;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$\Delta p$  – разность статических давлений, Па;

$\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;

$\mu$  – динамическая вязкость жидкости, Па·с.

При решении большинства прикладных задач определяют перепад статических давлений  $\Delta p$ , входящий в критерий Эйлера. Поэтому критерий  $Eu$  – определяемый, а остальные – определяемые. Тогда в общем виде критериальную зависимость для описания гидродинамического процесса представляют:

$$Eu = f(Ho, Fr, Re, \Gamma_1, \Gamma_2 \dots), \quad (4.5)$$

где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – симплексы геометрического подобия.

Чаще всего функцию такого рода аппроксимируют в степенном виде. В качестве геометрического симплекса подобия при движении жидкости по

каналу может выступать отношение длины канала  $l$  к его эквивалентному диаметру  $d_3$ . С учетом этого уравнение (4.5) записывают:

$$Eu = A \text{Ho}^m \text{Fr}^n \text{Re}^p \left( \frac{l}{d_3} \right)^q, \quad (4.6)$$

где  $A$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$  – численные коэффициенты, определяемые при обработке экспериментальных данных.

В ряде случаев невозможно определить ту или иную физическую величину, входящую в критерий подобия. Например, скорость потока в случае свободной конвекции. Тогда ее исключают путем сочетания двух или нескольких критериев с получением сложных производных критериев подобия, составленных из основных.

Например, исключить скорость можно путем сочетания критериев Рейнольдса и Фруда:

$$\text{Ga} = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} = \frac{l^3 \rho^2 g}{\mu^2}. \quad (4.7)$$

Полученный производный критерий – критерий Галилея. Его используют при описании процессов, осложненных естественной конвекцией потока жидкости.

Умножив данный критерий на безразмерное соотношение плотностей в разных точках жидкости  $\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}$  получим производный критерий – критерий Архимеда:

$$\text{Ar} = \frac{l^3 \rho^2 g}{\mu^2} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}. \quad (4.8)$$

Соблюдение равенства критериев  $\text{Ga}$  или  $\text{Ar}$  необходимо при моделировании процессов, протекающих под действием силы тяжести.