МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»





КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

(лекция 4)

для спец. 1-25 01 07, 1- 26 02 03



MUHCK 2014

Лекция 4. Гранные поверхности и многогранники.

Гранная поверхность - это линейчатая поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей (L) по ломанной направляющей (ABCD) (рис. 4.1). При этом если образующая при перемещении параллельна некоторому направлению N, образуется призматическая поверхность (рис. 4.1.,а), когда одна точка образующей неподвижна, то образуется пирамидальная поверхность (рис. 4.1.,б).

Элементами гранных поверхностей являются: **S - вершина** (точка пересечения образующих у пирамидальных поверхностей, у призматических она находиться в бесконечности);

грань - часть плоскости, ограниченная одним участком направляющей, AB, BC, CD и крайними положениями образующей относительно этого участка;

ребро - линия пересечения смежных граней. Замкнутые гранные поверхности, образованные некоторым числом граней называются многогранниками.

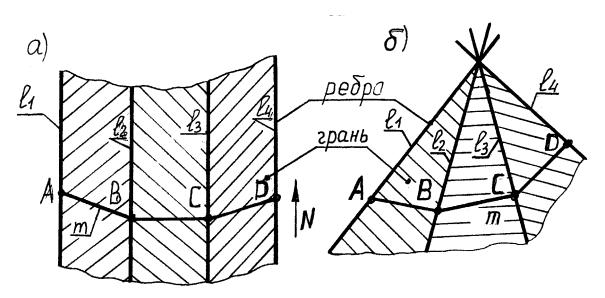
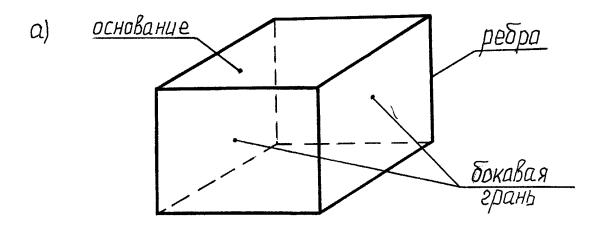


Рис. 4.1.

Призма - геометрическое тело, ограниченное призматической поверхностью и двумя параллельными плоскостями. При этом призматическая поверхность называется боковой поверхностью, а параллельные плоскости - верхнее и нижнее основание (рис. 4.2.а).

Пирамида - геометрическое тело, ограниченное пирамидальной поверхностью и плоскостью пересекающей все образующие. При этом пирамидальная поверхность называется боковой поверхностью, а плоскость -нижнее основание (рис. 4.2.б).



S)

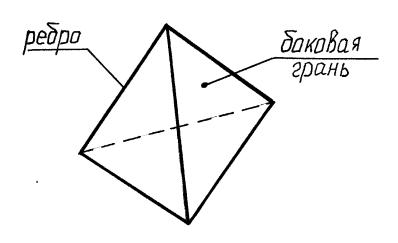


Рис. 4.2

4.1. Ортогональные проекции призмы и пирамиды.

Грани призм и пирамид ограничиваются ребрами, являющимися прямолинейными отрезками, пересекающимися между собой. Поэтому построение чертежей данных многогранников сводится к построению проекций точек (вершин) и отрезков прямых – ребер.

На рис. 4.3 представлен комплексный чертеж призмы и пирамиды, который задается проекциями её вершин и ребер с учетом их видимости.

Любую точку на гранной поверхности можно построить с помощью образующей, проходящей через эту точку (рис. 4.3в, г), или с помощью координаты $\mathbf{Y}_{\mathbf{A}}$ (рис. 4.3а), $\mathbf{Y}_{\mathbf{E}}$ (рис. 4.3г).

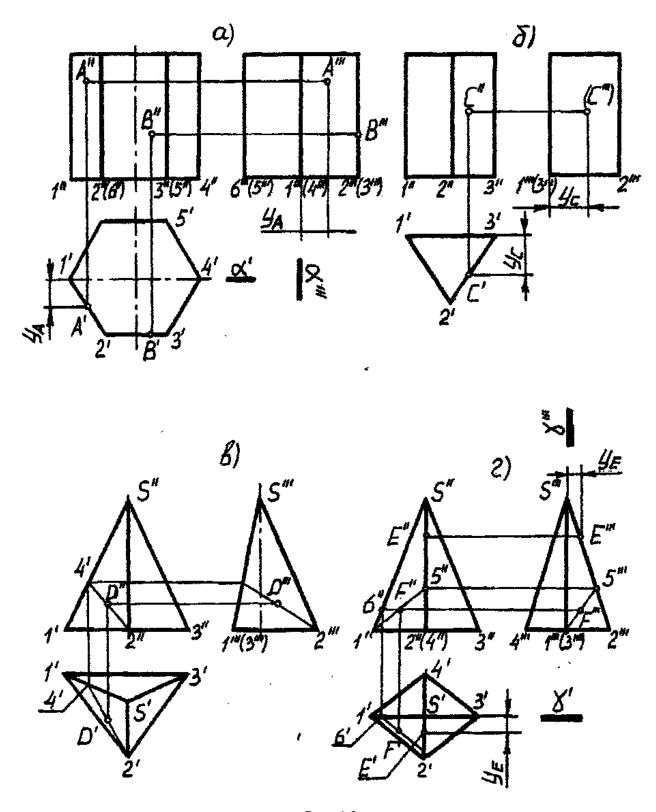


Рис. 4.3

4.2. Пересечение гранных поверхностей плоскостью.

В сечении поверхности плоскостью получается линия, которую строят по отдельным точкам. В общем случае строят точки пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью, т.е. находят точки пересечения прямой с

плоскостью. Для построения линии пересечения линейчатой кривой поверхности с плоскостью применяют вспомогательные плоскости. При подборе вспомогательных секущих плоскостей надо стремиться к упрощению построений, т.е. целесообразно применять в качестве вспомогательных плоскостей - плоскости частного положения, или общего, дающие простые сечения.

При пересечении гранной поверхности плоскостью в сечении образуется плоская замкнутая фигура - плоский многоугольник. Вершинами этого многоугольника являются точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью, а сторонами - линия пересечения граней многогранника с секущей плоскостью. На рис. 4.4 приведен пример построения фигуры пересечения пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью α .

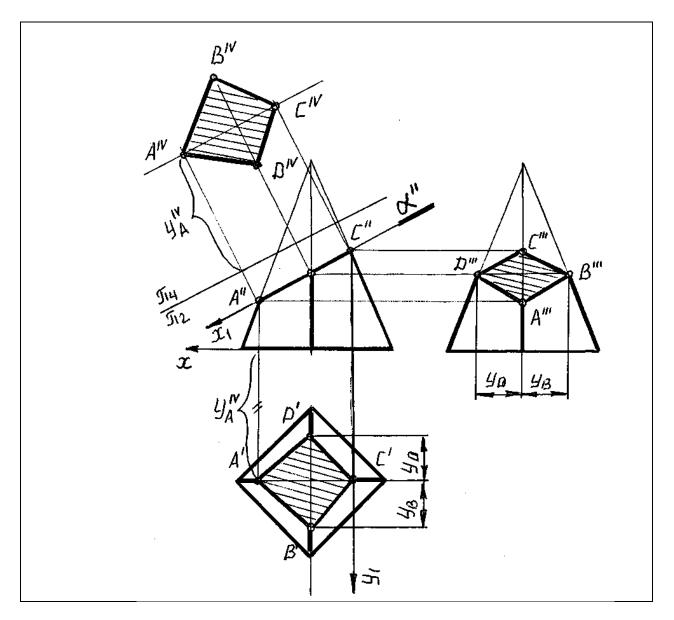


Рис. 4.4.

Построенная фигура сечения пирамиды плоскостью α - наклонная площадка ABCD. Фронтальные проекции A", B", C", D" точек находятся на пересечении фронтального следа α " плоскости с фронтальными проекциями ребер, а фронтальная проекция площадки ABCD совпадает со следом α ". Профильная

А"В"С""D" и горизонтальная А'В'С'D' проекции площадки построены по проекциям указанных точек на проекциях соответствующих ребер.

При построении натурального вида фигуры сечения пирамиды плоскостью применен способ замены плоскостей проекций. В качестве дополнительной плоскости принята плоскость π_4 , параллельная плоскости α и перпендикулярная плоскости π_2 . Натуральный вид фигуры сечения - $A^{IV}B^{IV}C^{IV}D^{IV}$.

4.3. Развертка пирамиды.

Построение развертки пирамиды можно проводить по следующей схеме:

- 1. Определить натуральные величины всех ребер;
- 2. Построить последовательно треугольники (грани пирамиды) таким образом, чтобы они примыкали один к другому и у них была общая вершина.

Пример. Построить полную развертку треугольной пирамиды SABC (рис.5.5) и нанести на нее линию сечения пирамиды фронтально проецирующей плоскостью α (α ").

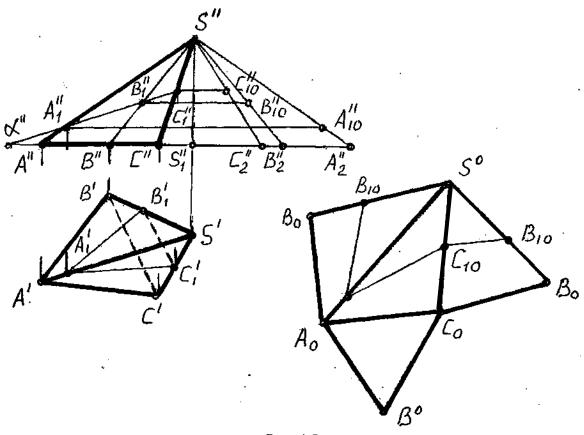


Рис. 4.5

Как видно из чертежа, основание **ABC** пирамиды расположено горизонтально и потому горизонтальная проекция **A'B'C'** является его натуральной величиной. Боковые ребра определяем с помощью прямоугольных треугольников, у которых одним катетом является превышение точки **S** над точками **A,B,C**, (отрезок **S''S₁"**), а вторым катетом — отрезок, равный горизонтальной проекции соответствующего ребра (S_1 " A_2 " = S'A', S"B" = S'B', S"C" = S'C'). Натуральной величиной боковых ребер являются отрезки **S"A"₂**, **S"B"₂**, **S"C"₂**.

На развертке последовательно строим треугольники боковых граней пирамиды каждый по своим трем сторонам. Для построения треугольника S_0 A_0 B_0 используем отрезки $S''A''_2$, $S''B''_2$, A'B', затем к стороне S_0 A_0 пристраиваем треугольник S_0 A_0 C_0 , а к нему S_0 C_0 B_0 , при этом используем размеры их соответствующих сторон.

Так как по условию развертка должна быть полной, к развертке боковой поверхности пирамиды пристраиваем треугольник A_0 B_0 C_0 основания, в данном случае равный треугольнику A'B'C'.

Для нанесения на развертку точек A_{10} B_{10} C_{10} , принадлежащих треугольнику A_1 B_1 C_1 (A_1 ' B_1 ' C_1 '; A_1 " B_1 " C_1 ") сечения пирамиды плоскостью α , предварительно определяем расстояние от вершины конуса до этих точек, для чего находим их положение (A_{10} B_{10} C_{10}) на натуральной длине соответствующего бокового ребра пирамиды. Откладывая от точки S_0 отрезки $S'A''_1$, $S'B''_1$, $S'C''_1$, намечаем точки A_{10} , B_{10} , C_{10} , через которые проводим линию сечения.

4.4. Развертка призмы.

Построение развертки призмы можно проводить различными способами.

5.4.1. Способ нормального сечения.

Построения проводятся по следующей схеме:

- 1. Пересечь поверхность плоскостью, перпендикулярной к ребрам;
- 2. Определить натуральный вид сечения поверхности призмы этой плоскостью, заметим, что каждый отрезок полученной ломанной линии равен ширине соответствующей грани призмы;
- 3. Развернуть полученную ломанную в прямую и через бывшие точки излома провести ребра призмы перпендикулярно к этой прямой;
- 4. На проведенных перпендикулярах отложить от прямой в одну и другую сторону соответствующую длину каждого ребра призмы, полученные точки последовательно соединить между собой.

Пример. Построить полную развертку поверхности наклонной треугольной призмы.

У данной призмы боковые ребра являются фронталями и потому фронтальная проекция будет их натуральной величиной.

Рассекаем призму плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам. Эта плоскость в данном случае должна быть фронтально проецирующей, например, плоскость α (α), которая пересекает призму по треугольнику $\mathbf{A_1B_1C_1}$ ($\mathbf{A_1'B_1'C_1'}$, $\mathbf{A_1''B_1''C_1''}$). Определяем натуральную величину сечения способом плоскопараллельного перемещения, стороны этого треугольника равны ширине соответствующих граней призмы.

На свободном поле чертежа проводим прямую, на которой откладываем отрезки $C_{10}B_{10}$, $B_{10}A_{10}$, $A_{10}C_{10}$. Через полученные точки $C_{10}B_{10}A_{10}C_{11}$ проводим перпендикуляры к прямой $C_{10}-C_{11}$, на которых откладываем от этих точек вверх отрезки C_1 "С", B_1 "В", A_1 "А" и вниз отрезки C_1 "С $_2$ ", B_1 "В $_2$ ", A_1 "А $_2$ ". Полученные точки на ребрах призмы замыкаем в контур $CBAC_0$, $C_2B_2A_2C_0$. К полученной

развертке боковой поверхности призмы пристраиваем треугольники верхнего и нижнего оснований.

Для построения на развертке точки K, принадлежащей грани BCC_2B_2 , используем два размера: $B_{10}K_2=B_{10}K_{20}$ и $K_2K_1=K_2$ " K_1 ".

Если боковые ребра призмы не параллельны плоскости проекций, то следует преобразовать комплексный чертеж так, чтобы они стали прямыми уровня.

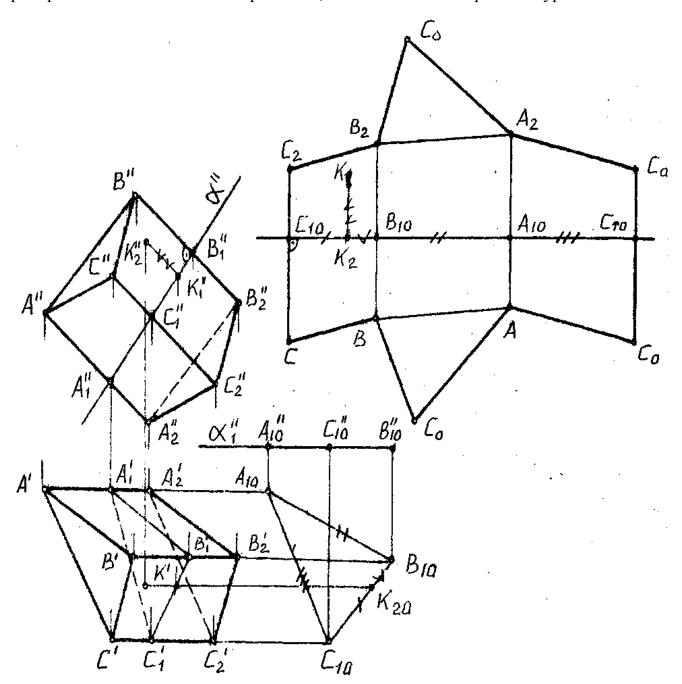


Рис. 4.6

5.4.2. Способ раскатки.

Этот способ применяется в том случае, если боковые ребра призмы являются прямыми уровня и основание призмы на одной проекции изображается в натуральную величину.

Построение проводится по следующей схеме:

- 1. Мысленно удаляются основания призмы и боковая поверхность разрезается по одному из ребер;
- 2. Вращением вокруг этого ребра (оно является линией уровня) совмещаются последовательно все боковые грани с плоскостью уровня, проходящей через данное ребро.

Пример. Построить полную развертку поверхности треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.

Развертка может быть построена способом раскатки, потому что в данной призме боковые ребра являются фронталями, а горизонтальная проекция A'B'C' – натуральная величина основания ABC, которое параллельно плоскости π_1 .

Мысленно разрезаем боковую поверхность призмы по ребру $\mathbf{A}\mathbf{A}_1$ и вращением вокруг его совмещаем последовательно все боковые грани призмы с фронтальной плоскостью, проходящей через это ребро.

При совмещении грани $\mathbf{AA_1}$ $\mathbf{B_1B}$ с этой плоскостью ребро $\mathbf{AA_1}$ (A'A'₁, A"A₁") не меняет своего положения, а точка \mathbf{B} (B',B') вращается во фронтально проецирующей плоскости, перпендикулярной к этому ребру. Поэтому из проекции \mathbf{B} " проводим перпендикуляр к прямой $\mathbf{A'A_1''} \equiv \mathbf{A_0A_{10}}$ и на его продолжении засечкой из точки $\mathbf{A''} \equiv \mathbf{A_0}$ дугой радиуса $\mathbf{A_0B_0} = \mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$ намечаем точку $\mathbf{B_0}$. Через эту точку проводим прямую, параллельную ребру $\mathbf{A_0A_{10}}$ и на ней намечаем точку $\mathbf{B_{10}}$.

Построение точек C_0 и A_0 проводим аналогично построениям точки B_0 , только заметим, что точка C_0 получена на своем перпендикуляре засечкой из точки B_0 дугой радиуса $B_0C_0=BC=B'C'$, а точка A_0 — засечкой из точки C_0 дугой радиуса $C_0A_0=CA=C'A'$ на перпендикуляре, восстановленном из точки A'.

Затем строим точки C_{10} и A_{10} и к развертке боковой поверхности пристраиваем нижнее и верхнее основание призмы.

Для построения на развертке точки \mathbf{K} , принадлежащей грани $\mathbf{ABB_1A_1}$, использована точка $\mathbf{K_1}$ ($\mathbf{K'_1}$, $\mathbf{K''_1}$).

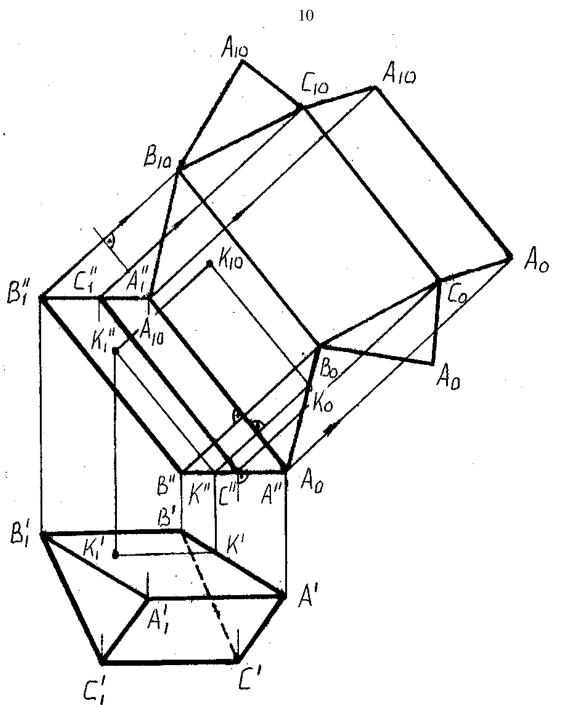


Рис. 4.7