МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И НЖЕНЕРНАЯ
и МАШИННАЯ
Г РАФИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для спец. 1-25 01 07, 1- 26 02 03

МИНСК 2014

Лекция 2. Проецирование точки, отрезка прямой, плоскости.

Изображение геометрических образов в начертательной геометрии выполняют методом прямоугольного (ортогонального) проецирования. Изучение начинается с построения проекций точки, т.к. любое геометрическое тело можно рассматривать как множество точек, ему принадлежащих. В изучении раздела приняты следующие обозначения:

1. Точки в пространстве – прописными буквами латинского алфавита до буквы **O (A,B,C, …,N,O)**, а также цифрами ;
2. Последовательность точек (и других элементов) – подстрочными индексами **(A_1, B_1, A_2, B_2, B_3, …)**;
3. Линии в пространстве – по точкам, определяющим линию **(AB, BC, ABE,…)**;
4. Углы – строчными буквами греческого алфавита **(α, β, δ, ζ, …)**;
5. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита **(α, β, δ, ζ, …)**;
6. Плоскости проекций – произвольная плоскость **π**, горизонтальная π_1, фронтальная π_2, профильная π_3, дополнительная π_4, π_5.
7. Центр проецирования – буквой **S**;
8. Проекции точек – на произвольную плоскость **(A^0, B^0, C^0,…)**, на горизонтальную **(A', B', C', …)**, на фронтальную (**A'', B'', C'', …)**, на профильную **(A''', B''', C''', …)**;
9. Проекции линий–по проекциям точек, определяющим линию**(A' B' C')**.

2.1. Метод проекции. Центральное и параллельное проецирование.

Метод проекций предполагает наличие объекта проецирования, проецирующих лучей и плоскости проекций, на которую осуществляется проецирование. На рис. 2.1 представлены: простейший геометрический образ - точка А, плоскость проекций π_0 и проецирующий луч **P**, проходящий через точку А.

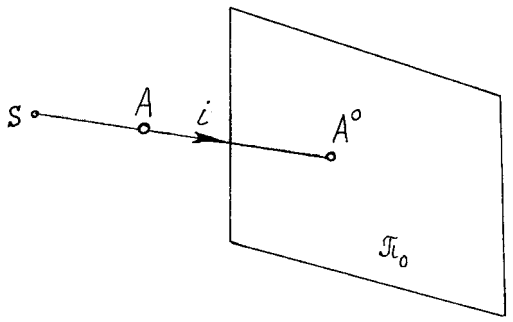


Рис. 2.1.

Проекцией точки A^0 на плоскость проекций π_0 является точка пересечения с плоскостью проекций проецирующего луча, проходящего через заданную точку.

Так как любой геометрический образ можно рассматривать как множество точек, то построение проекции этого образа сводится к построениям проекций отдельных его точек.

Существуют **центральные и параллельные** проекции. При центральном проецировании все проецирующие лучи исходят из одной точки пространства, называемой **центром проецирования**.

На рис. 2.2 приведены плоскость проекций π, центр проецирования **P** и объекты проецирования - точки **A, B, C**. Для построения проекций этих точек на плоскости проекций проводим из центра проекций через точки проецирующие лучи. Пересечение этих лучей с плоскостью проекций дает центральные проекции точек **A, B, C.**

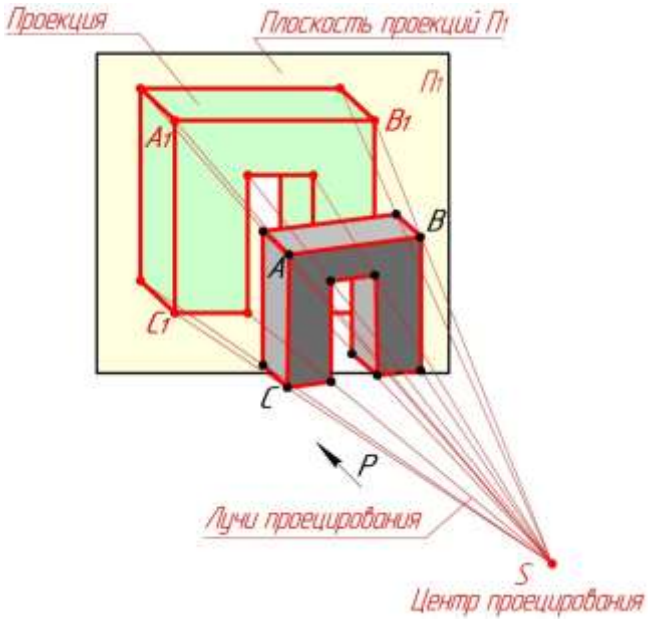


Рис. 2.2.

Если центр проецирования удалить в бесконечность, то проецирующие лучи будут проходить параллельно друг другу. При этом считают, что направление проецирования задано. На рис. 2.3 дана плоскость проекций π, объект проецирования - линии **AB, AC** и направление проецирования **P**. Для получения параллельной проекции линии AB, через точки A и B, определяющие эту линию проводим проецирующие лучи параллельно заданному направлению проецирования **P**. Пересечение этих лучей с плоскостью проекции π и даст нам решение данной задачи.

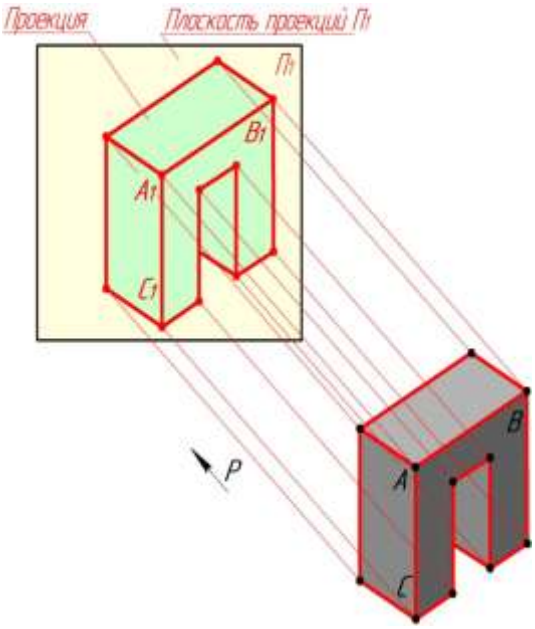


Рис. 2.3.

В зависимости от направления проецирующих лучей по отношению к плоскости проекций различают **косоугольные** ($\alpha \neq 90^o$) **прямоугольные (ортогональные)** ($\alpha = 90^o$) параллельные проекции.

Свойства **центрального проецирования:**

1. Проекцией точки является точка;
2. Прямая, не проходящая через центр проецирования, проецируется прямой (проецирующая прямая – точка);
3. Плоская (двумерная) фигура, не принадлежащая проецирующей плоскости, проецируется двумерной фигурой (фигуры, принадлежащие проецирующей плоскости, проецируются вместе с ней в виде прямой);
4. Трехмерная фигура отображается двумерной;
5. При заданном центре проецирования фигуры на параллельных плоскостях подобны;
6. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением (кинофильм, фотопленка).

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, а также появляются новые:

1. Если отрезок прямой делится точкой в определенном отношении, то и длина проекции отрезка делится проекцией этой точки в том же отношении;
2. Проекции равных по длине отрезков взаимно параллельных прямых взаимно параллельны и равны по длине;
3. Плоская фигура, параллельная плоскости проекции, проецируется на эту плоскость в такую же фигуру;
4. Параллельный перенос фигуры в пространстве или плоскости проекций не изменяет вида и размера проекции фигуры.

2.2. Образование чертежа на двух и трех плоскостях проекции.

Рассмотренные выше методы проецирования позволяют построить проекционный чертеж заданного геометрического образа, но не позволяют решить обратную задачу - представить образ по его проекции, т.е. нет **обратимости** чертежа.

Наиболее полное представление о геометрическом образе дает проецирование на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем совмещают с плоскостью чертежа. Этот способ получения комплексного чертежа был предложен французским геометром Гаспаром Монжем (рис. 2.4).

На рис. 2.4, а изображены две взаимно перпендикулярные плоскости: горизонтальная плоскость проекций π_1 и фронтальная плоскость проекций π_2. Линия пересечения двух плоскостей проекций называется **осью проекций** (***x***, π_1/π_2). При совмещении плоскости проекций π_1 с плоскостью чертежа, в которой расположена плоскость проекций π_2, получаем комплексный чертеж (**эпюр Монжа**) точки А (рис. 2.4,б). Линия **A''A'** называется вертикальной линией связи. Отрезок $\mathbf{A''A_X}$ характеризует удаление точки А от плоскости π_1 и является координатой **Z (аппликатой)**, $\mathbf{A'A_X}$ характеризует удаление точки А от плоскости π_2 - координата **Y (ордината)** .

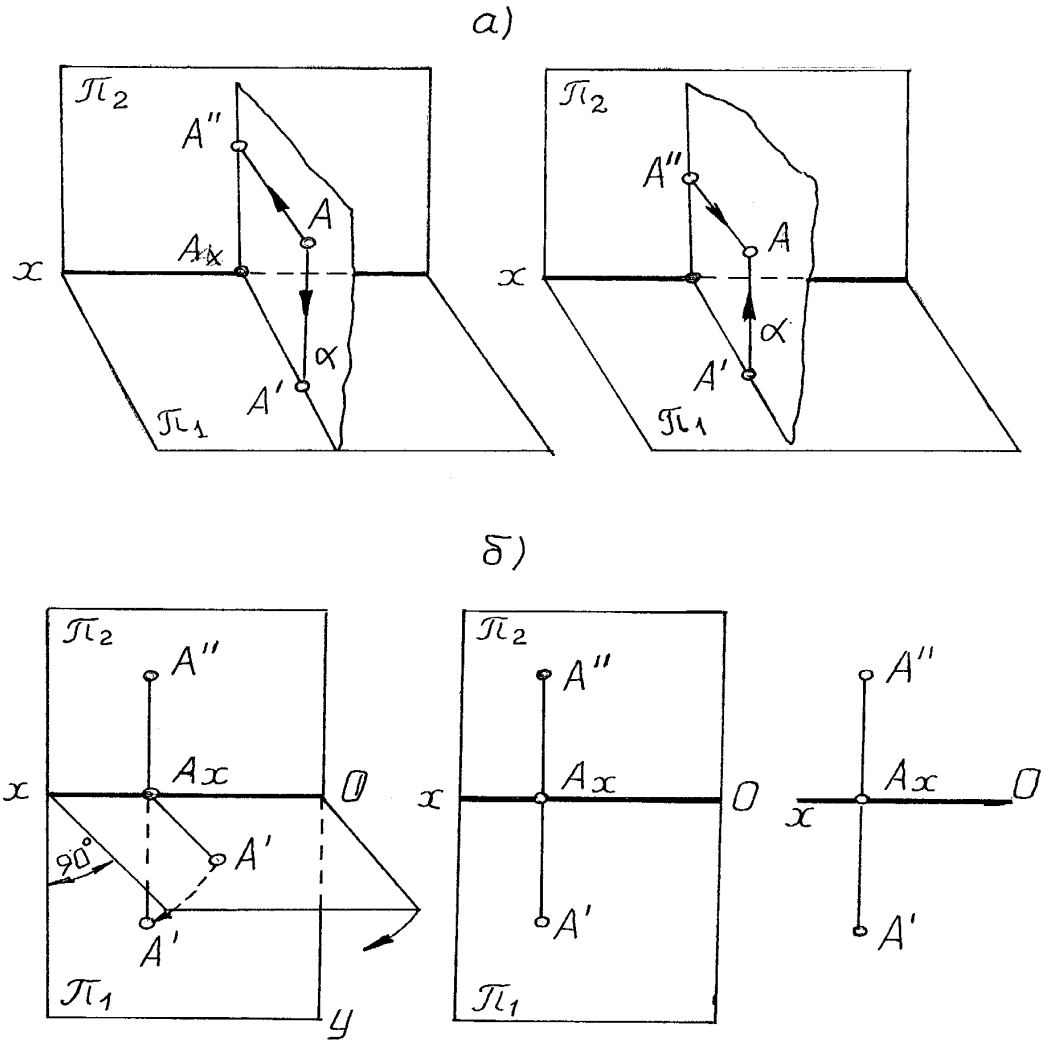


Рис. 2.4.

Несмотря на то, что проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекции дает нам обратимость чертежа во многих случаях для решения задач необходимо три и более проекции. Поэтому вводят три и более плоскостей проекций.

Введем в систему $\boldsymbol{\pi}_1/\boldsymbol{\pi}_2$ третью вертикальную плоскость проекций, перпендикулярную к плоскостям проекций $\boldsymbol{\pi}_1$ и $\boldsymbol{\pi}_2$ рис.2. 5. Эта плоскость проекций называется **профильной** и обозначается $\boldsymbol{\pi}_3$. В этой системе оси проекций **z** или $\boldsymbol{\pi}_2/\boldsymbol{\pi}_3$, **y** или $\boldsymbol{\pi}_1/\boldsymbol{\pi}_3$ являются линиями пересечения фронтальной и горизонтальной плоскостей проекций с профильной соответственно. Пересечение всех трех осей проекций - точка **O**. (рис. 2.5.)

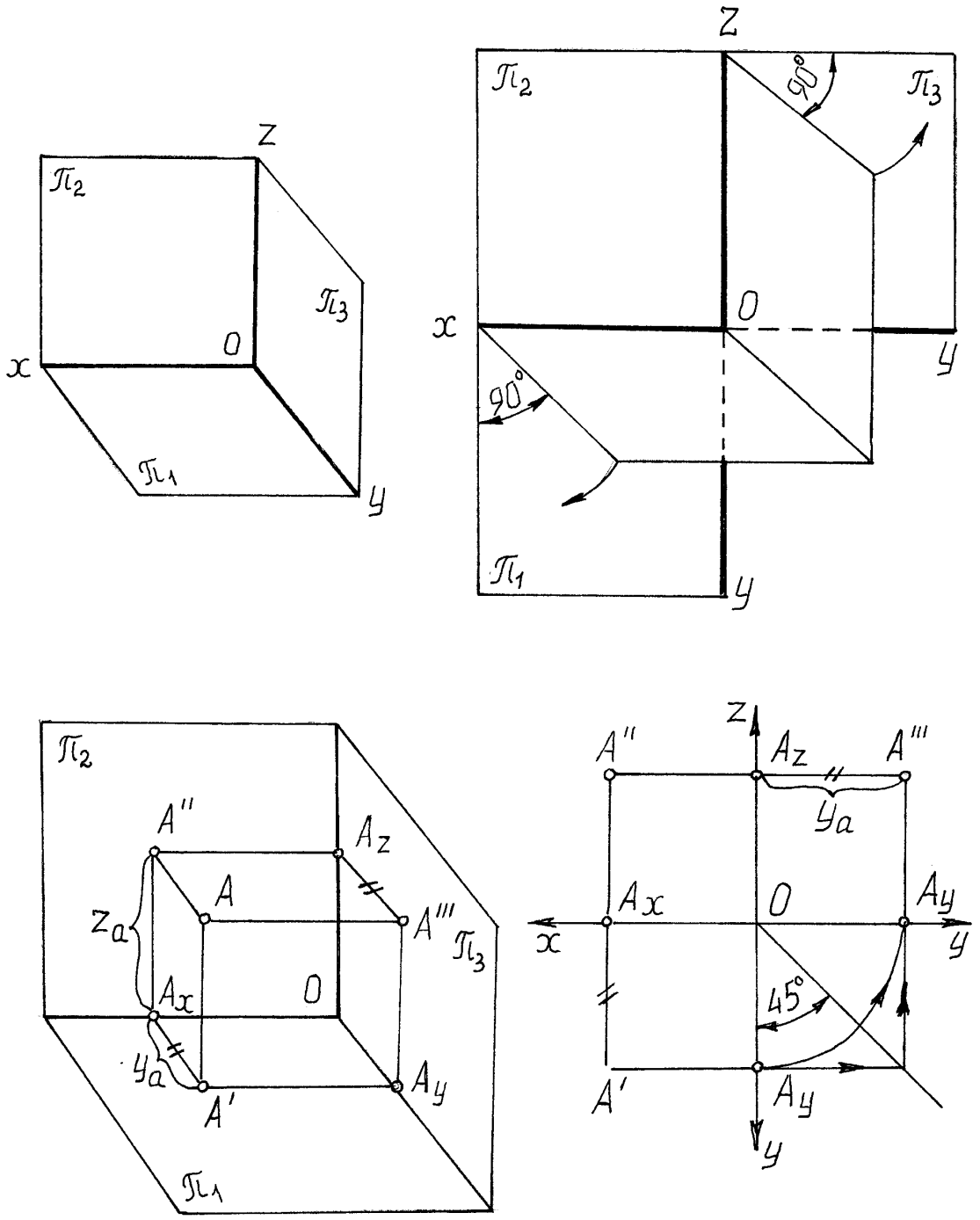


Рис. 3.5.

2.3. Прямая линия.

Для того чтобы построить проекцию прямой линии, достаточно построить проекции двух ее точек и одноименные проекции соединить.

Относительно плоскостей проекций прямая может занимать различные положения. Если прямая непараллельная и (или) неперпендикулярная ни одной плоскости проекций ее называют **прямой общего положения** (рис. 2.6.).

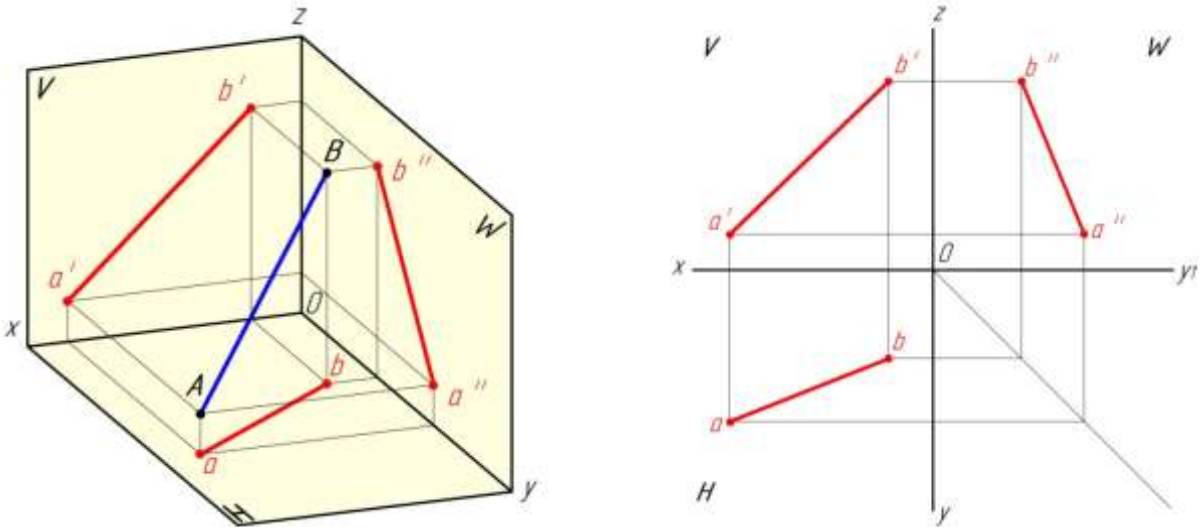


Рис. 2.6.

Если прямая параллельна одной из плоскости проекций, ее называют **прямой уровня** (рис. 2.7а,б,в). Проекция прямой, которая непараллельная оси проекций, представляет натуральную величину отрезка прямой.

Прямая, которая параллельна горизонтальной плоскости проекций называется **горизонтальной прямой** (рис. 2.7,а).

Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций, называется **фронтальной прямой** (рис. 2.7,б).

Прямая, параллельная профильной плоскости проекций, называется **профильной прямой** (рис. 2.7,в).

Прямая, перпендикулярная плоскости проекций, называется **проецирующей прямой**. На рис. 2.7,г приведена горизонтально - проецирующая прямая, рис. 2.7,д - фронтально - проецирующая прямая, рис. 2.7,е – профильно - проецирующая прямая.

Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными и скрещиваться (рис. 2.8).

Если прямые АВ и СД **параллельны**, то их одноименные проекции параллельны (рис. 2.8а).

Если прямые АВ и СД **пересекаются** в некоторой точке Е, то проекции этой точки лежат на одной линии связи **Е' Е''** (рис. 2.8,б).

Если прямые АВ и СД **скрещиваются**, то точки пересечения 1-2 и 3-4 одноименных проекций не лежат на одной линии связи (рис. 2.8,в). При этом представляет интерес, какая из изображенных на чертеже прямых выше другой

или ближе другой к наблюдателю. Это определяется рассмотрением конкурирующих точек скрещивающихся прямых, проекции которых на одной из плоскостей проекций совпадают. Из рис. 2.8,в видно, что при взгляде сверху, по стрелке **M**, на плоскости проекций π_1 точка **3** прямой СД закрывает точку **4** прямой АВ, поэтому- 4^{I} показано в скобках. При взгляде спереди, по стрелке **N** точка **1** прямой **СД** закрывает на плоскости π_2 точку **2** прямой АВ, поэтому 2^{II} показано в скобках.

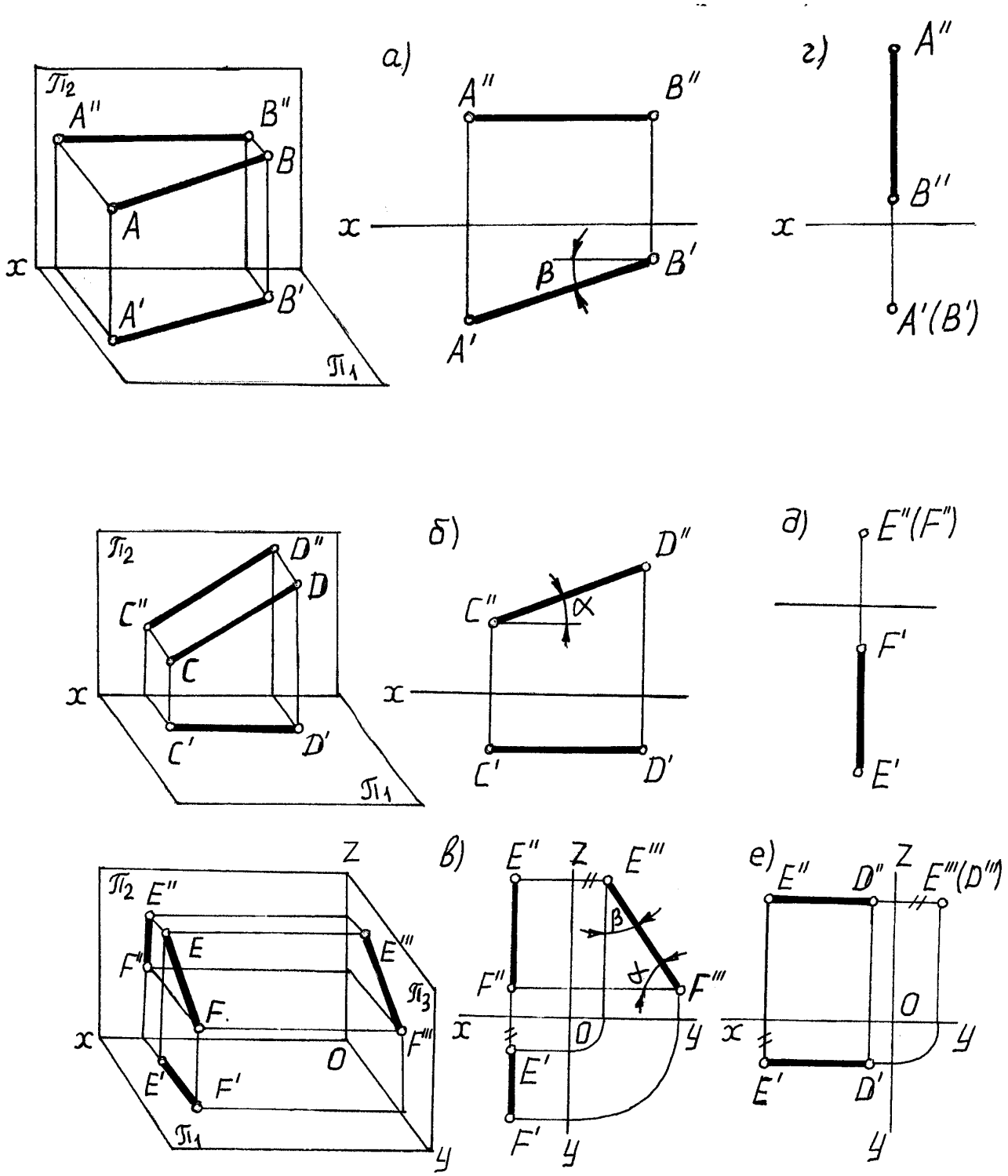


Рис. 2.7.

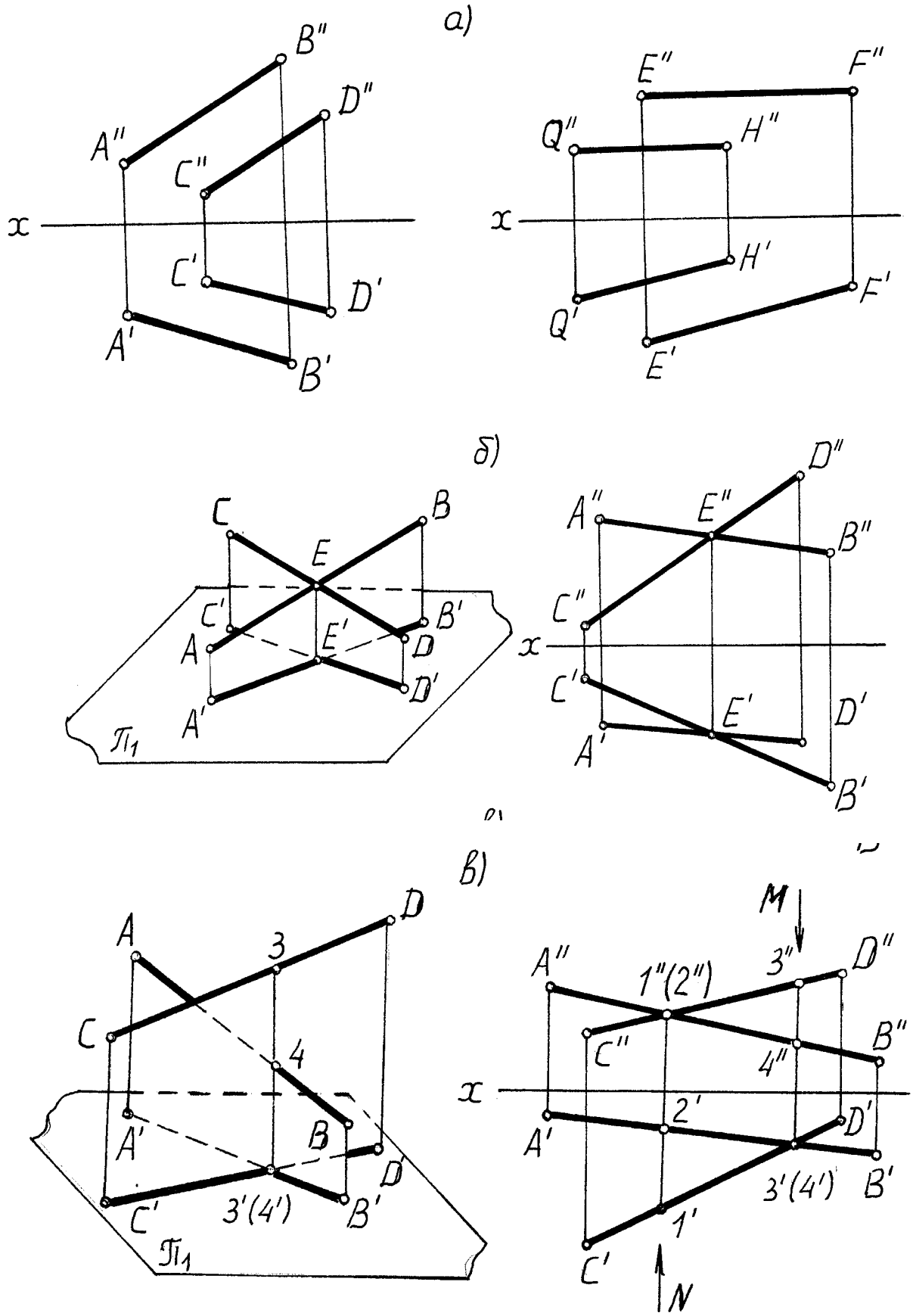

а)
B''
D''
A''
C''
x
C'
D'
A'
B'
E''
F''
Q''
H''
x
H'
F'
Q'
E'
б)
C
B
E
C'
B'
A
E'
D
D'
A'
π1
D''
A''
E''
B''
C''
x
C'
E'
D'
A'
B'
в)
A
D
3
C
4
A'
B
D
C'
3'(4')
B'
π1
M
A''
1''(2'')
3''
D''
C''
B''
4''
x
2'
D'
A'
3'(4')
B'
1'
C'
N

Рис. 2.8.

2.4. Плоскость.

Плоскость на чертеже (рис. 2.9) может быть задана **проекциями трех точек, не лежащими на одной прямой** (а), **прямой и точкой, взятой вне прямой** (б), **двумя пересекающимися прямыми** (в), **двумя параллельными прямыми** (г), **плоской фигурой, например треугольником** (д). **следами плоскости, т.е. линиями, по которым плоскость пересекает плоскость проекций** (е).

Плоскости относительно плоскостей проекций могут занимать **общее и частное положение,**

Плоскость, не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций называется плоскостью **общего положения** (рис. 2.10)

Плоскости **частного положения** разделяются: на плоскости **проецирующие** – перпендикулярные одной из плоскостей проекций, и на плоскости **уровня** – параллельные одной из плоскостей проекций.

Проецирующие плоскости различают:

а) горизонтально-проецирующие (плоскость перпендикулярна π_1); (рис. 2.11).

б) фронтально-проецирующие (плоскость перпендикулярна π_2); (рис. 2.12).

в) профильно-проецирующие (плоскость перпендикулярна π_3); (рис. 2.13).

Плоскости уровня различают:

а) горизонтальные (плоскость параллельная π_1) (рис. 2.14,а);

б) фронтальные (плоскость параллельная π_2) (рис. 2.14,б);

в) профильные (плоскость параллельная π_3) (рис. 2.14,в);

Линию пересечения плоскости с плоскостью проекций называют **следом** (рис. 2.13). Линию пересечения плоскости с плоскостью проекции π_1 называют **горизонтальным следом (α')**, с плоскостью проекции π_2 – **фронтальным следом (α'')**, с плоскостью проекции π_3 – **профильным следом (α''')**.

В плоскости можно провести множество прямых. К прямым, занимающим особое положение в плоскости, относятся **горизонтали, фронтали** (рис. 2.15) и линии наибольшего наклона (**линии ската**) к плоскости проекций.

Горизонталь - прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (π_1). На рис. 2.16,а проекции горизонтали проведены через проекции C", C' точки C и 1", 1' точки 1 прямой AB плоскости, заданной проекциями точки C и прямой AB. Фронтальная проекция C"1" горизонтали параллельна оси x.

Фронталь - прямая лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (π_2). На рис. 2.16,б проекции фронтали проведены через проекции 1", 1' и 2", 2' точек 1 и 2 проекций A"B", A'B', C"D", C'D' параллельных прямых AB и CD заданной плоскости. Горизонтальная проекция 1'2' фронтали параллельна оси x.

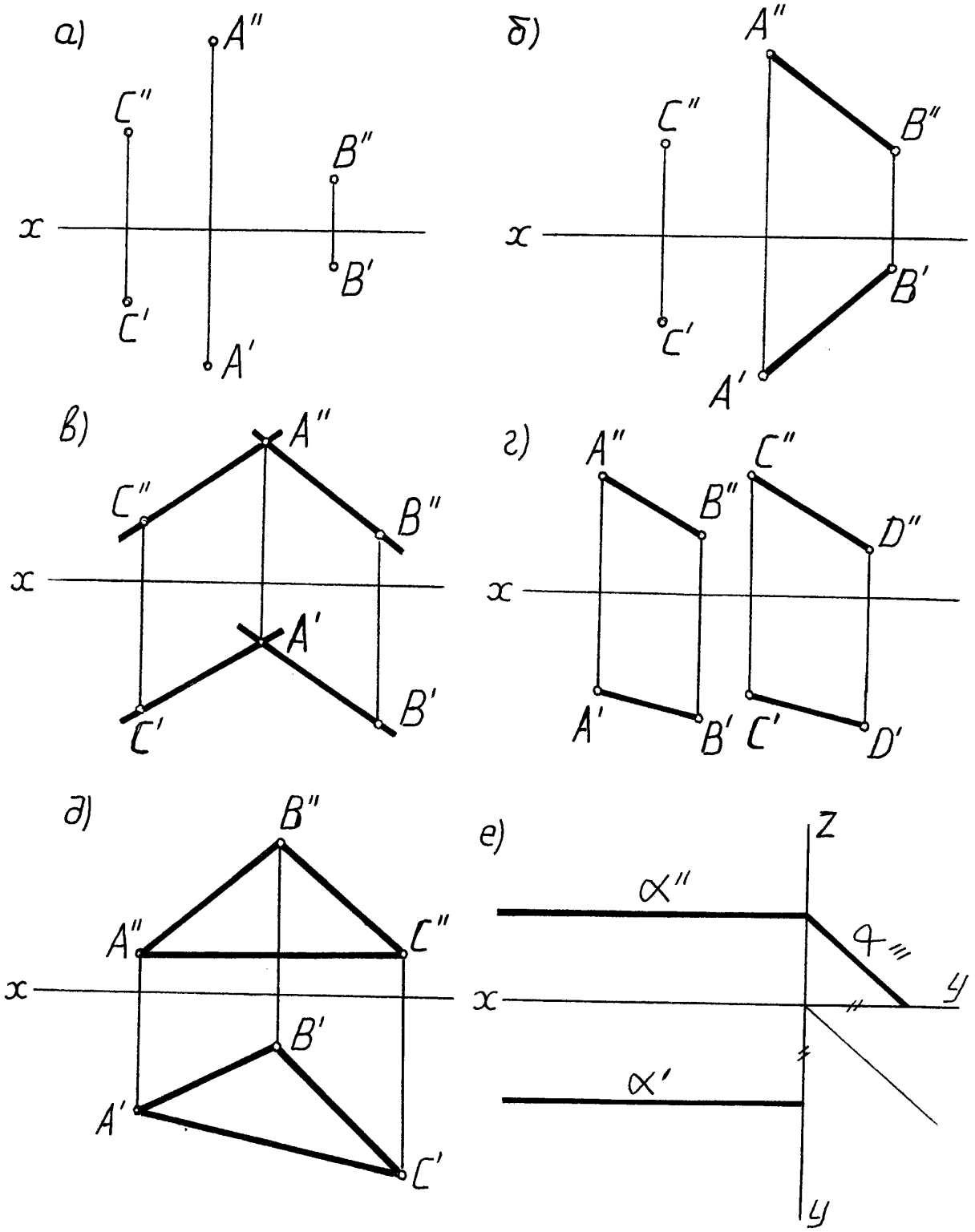

а)
A''
C''
B''
x
B'
C'
A'
б)
A''
C''
B''
x
B'
C'
A'
в)
A''
C''
B''
x
A'
B'
C'
г)
A''
C''
B''
D''
x
A'
B'
C'
D'
д)
B''
A''
C''
x
B'
A'
C'
е)
z
α''
q
x
y
α'
y

Рис. 2. 9

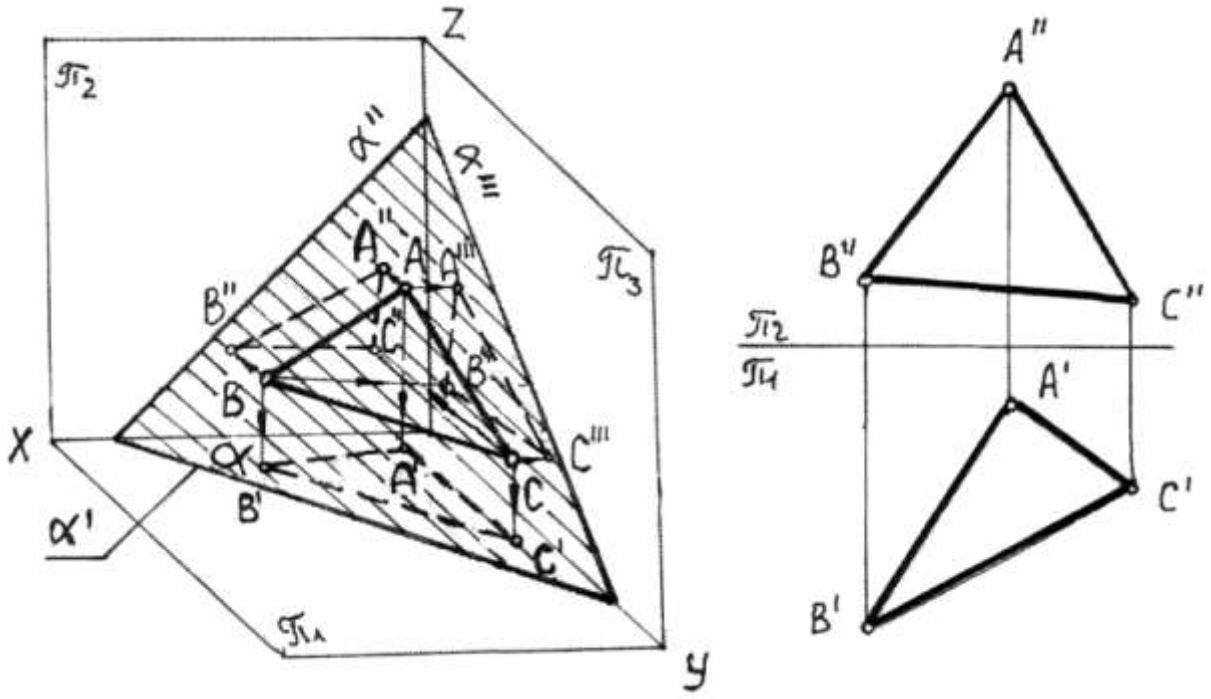


Рис. 2.10

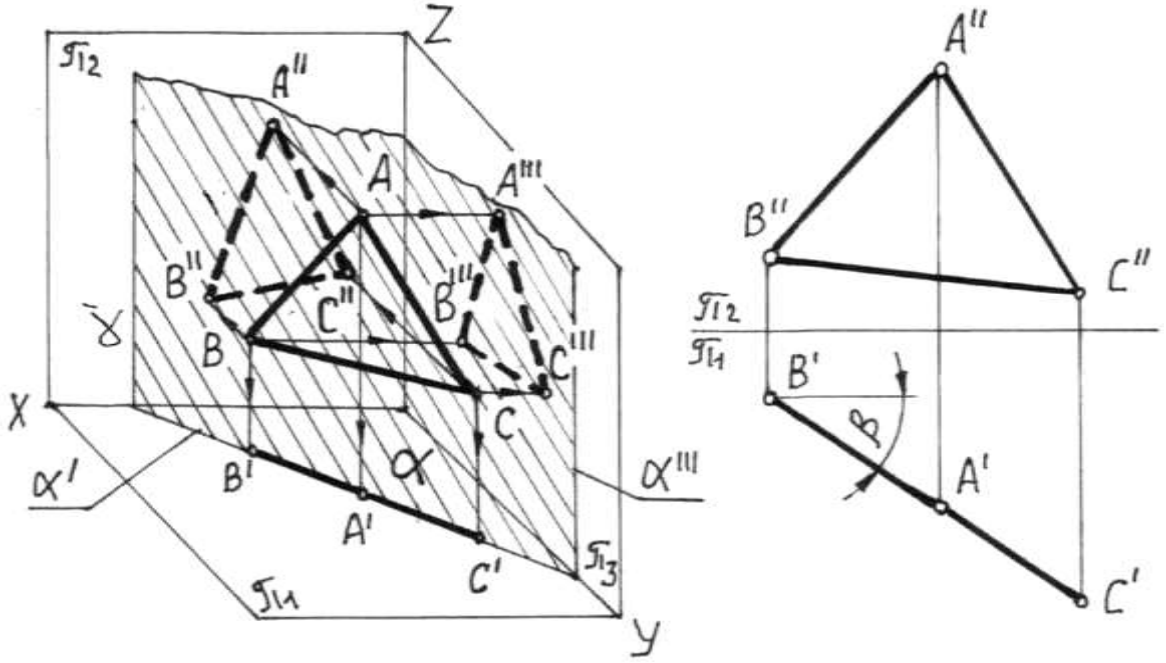


Рис. 2.11

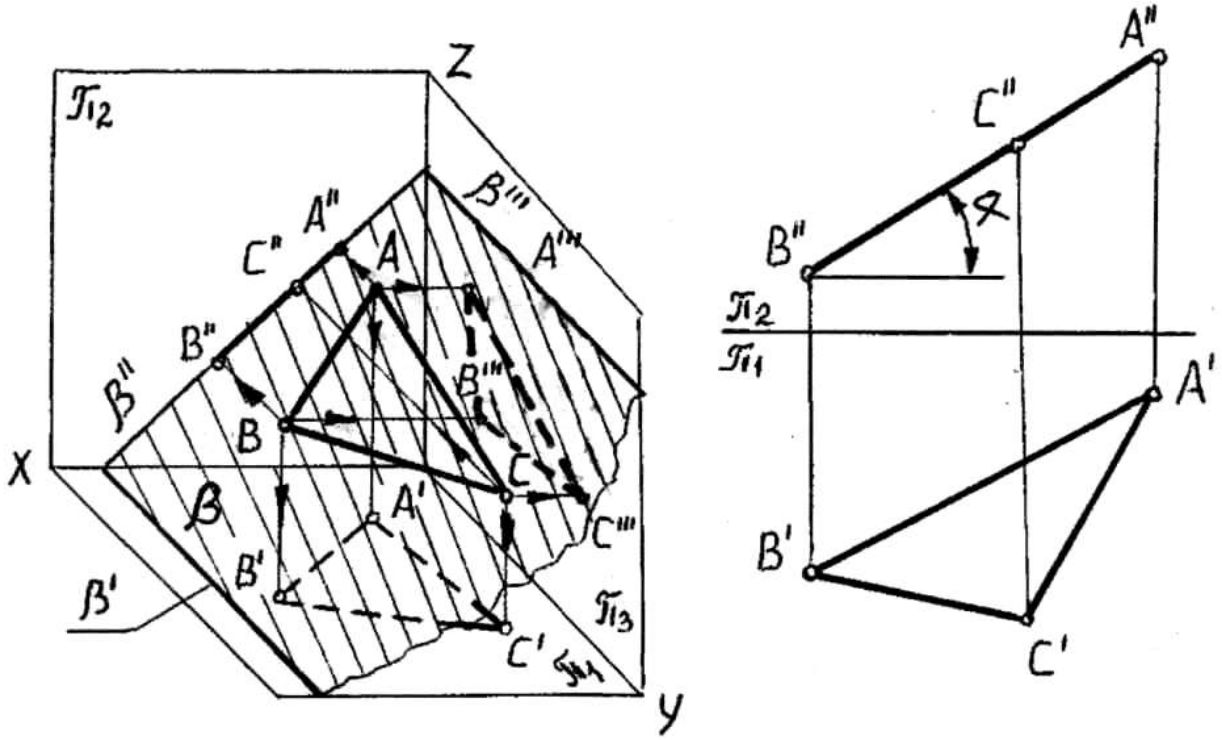


Рис. 2.12

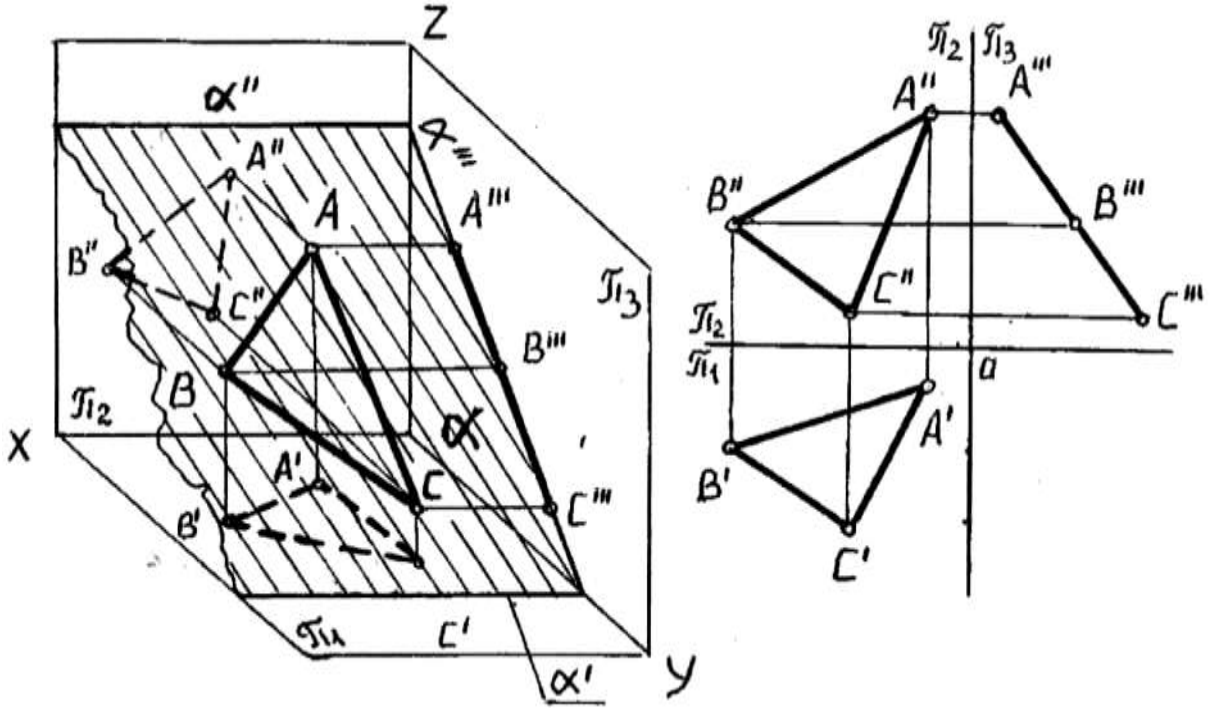
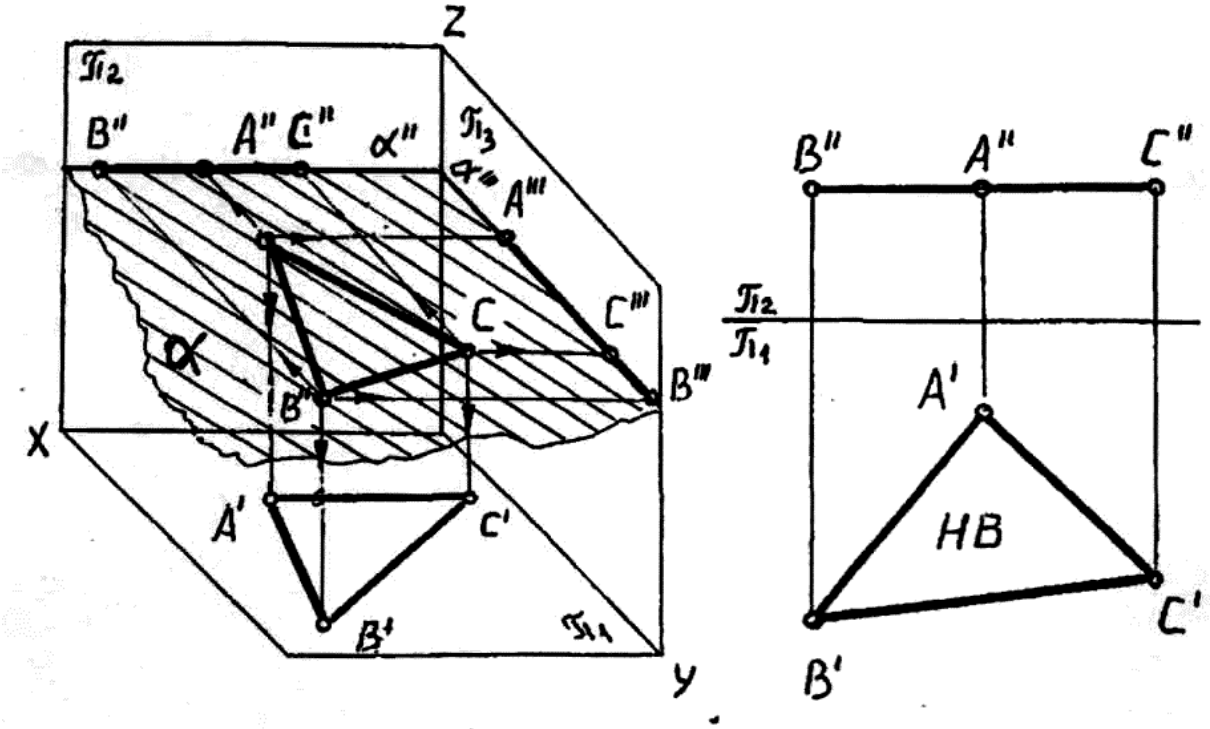


Рис. 2.13


Z
π2
B''
A''
C''
α''
π3
A'''
C
C'''
α
B'''
B
X
A'
C'
B'
π1
Y
B''
A''
C''
π2
π1
A'
HB
C'
B'

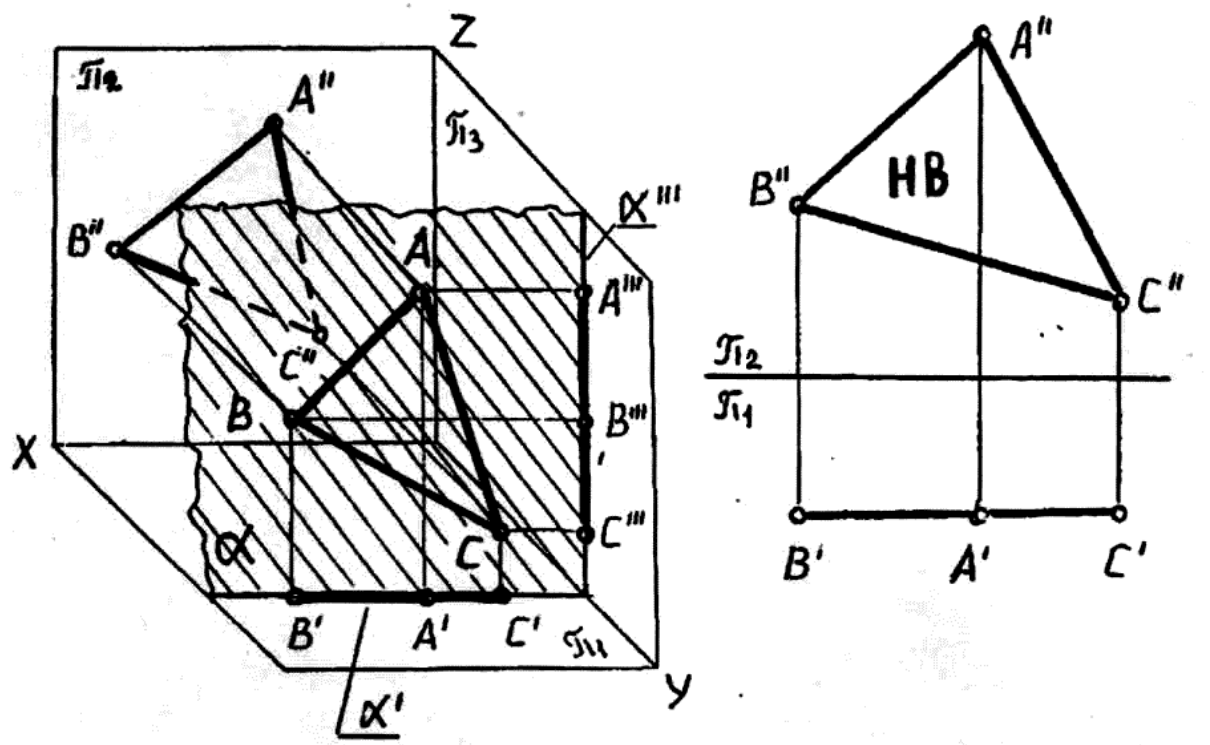

Z
π2
A''
π3
α'''
B''
A
A'''
C''
B
B'''
X
C'''
α
C
B'
A'
C'
π1
α'
Y
A''
B''
HB
C''
π2
π1
B'
A'
C'

Рис. 2.14

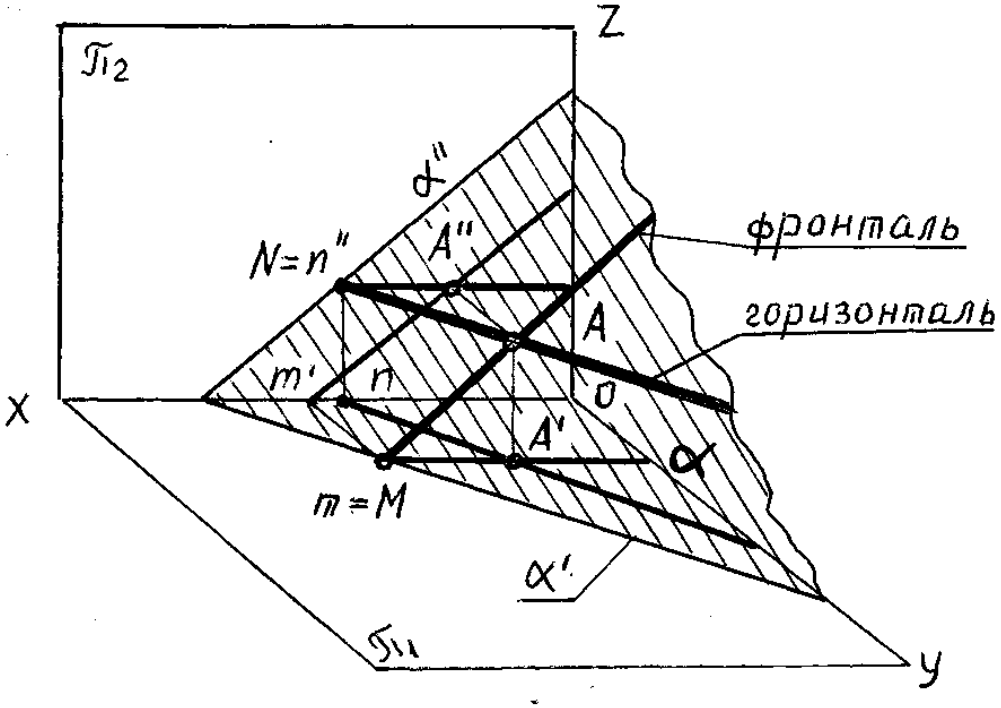
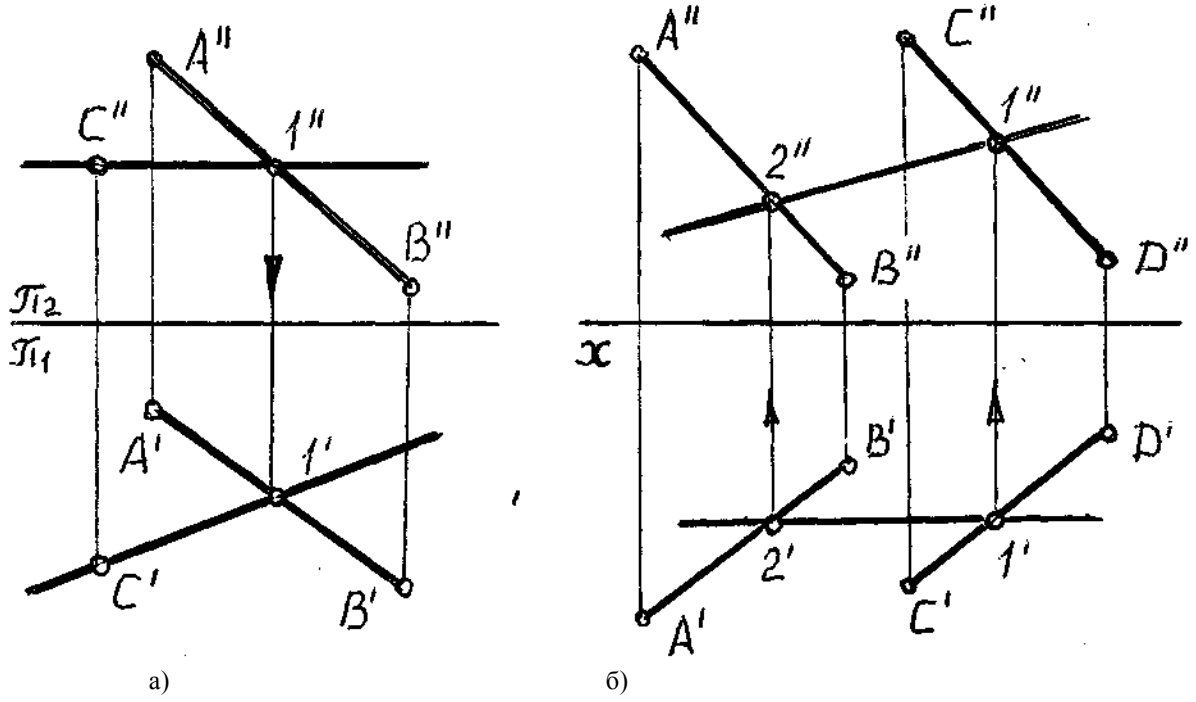


Рис. 2.15



а) б)

Рис. 2.16

Линия ската - прямая (В2), лежащая в плоскости и перпендикулярная ее горизонтали. На рис. 2.17 проекции В"2", В '2' линии ската В-2 в плоскости треугольника с проекциями А"В"С", А'В'С' проведены перпендикулярно горизонтали с проекциями А" 1", А'1'.

Вначале на горизонтальной проекции из проекции В' проведен перпендикуляр

B'2' к проекции A'1' горизонтали, построена фронтальная проекция 2" точки 2 и через нее проведена фронтальная проекция B"2" линии ската.

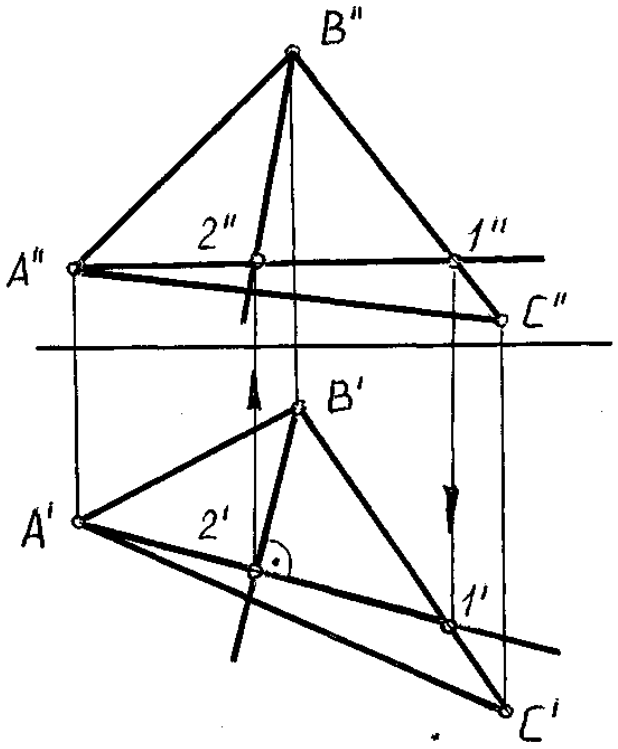


Рис. 2.17

2.5. Пересечение прямой с плоскостью.

При пересечении прямой линии с плоскостью возможны следующие случаи пересечения.

2.5.1. Прямая общего положения, плоскость - горизонтально – проецирующая.

На рис. 2.18 прямая АВ общего положения пересекается: с горизонтально - проецирующей плоскостью β, заданной следами β^{I} и β^{II} . Точка их пересечения (**К**) одновременно принадлежит прямой и плоскости, следовательно на горизонтальной плоскости проекций находим $\mathbf{K^{I}}$ (пересечение горизонтального следа плоскости β^{I} с горизонтальной проекцией прямой **A' B'**).

По вертикальной линии связи находим фронтальную проекцию K^{II} . Определяем видимость, считая плоскость непрозрачной.

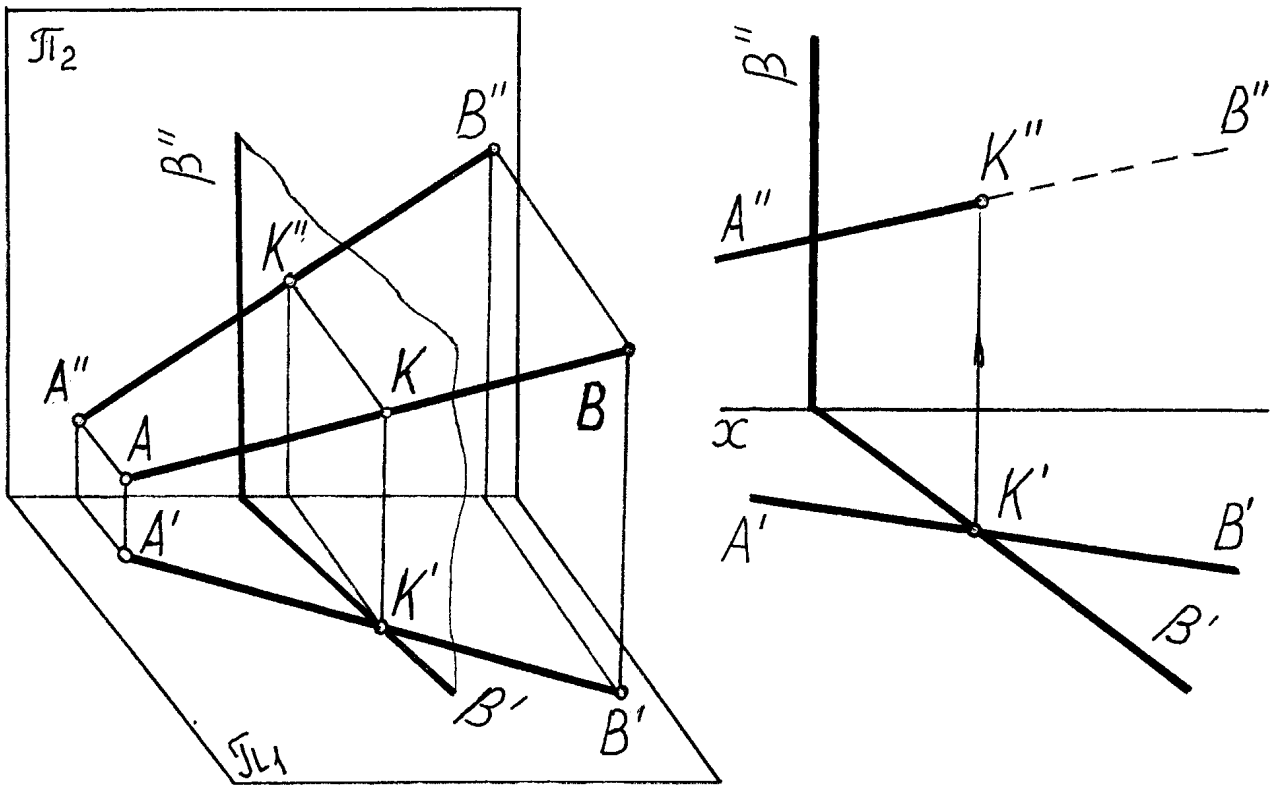


Рис. 2.18

2.5.2. Прямая и плоскость общего положения.

На рис. 2.19 дано построение точки пересечения прямой DE с плоскостью общего положения, заданной треугольником АВС. Проекции точки пересечения строят в следующей последовательности:

– через прямую DE проводят вспомогательную секущую плоскость, например фронтально-проецирующую α:

– строят проекции **1”2”, 1’2’** линии пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника ABC (по фронтальным проекциям точек 1” и 2” находим горизонтальные проекции точек 1’ и 2’);

– находят проекции **M”, M’** точки пересечения полученной линии 1-2 с заданной DE;

– определяют видимые участки прямой DE.

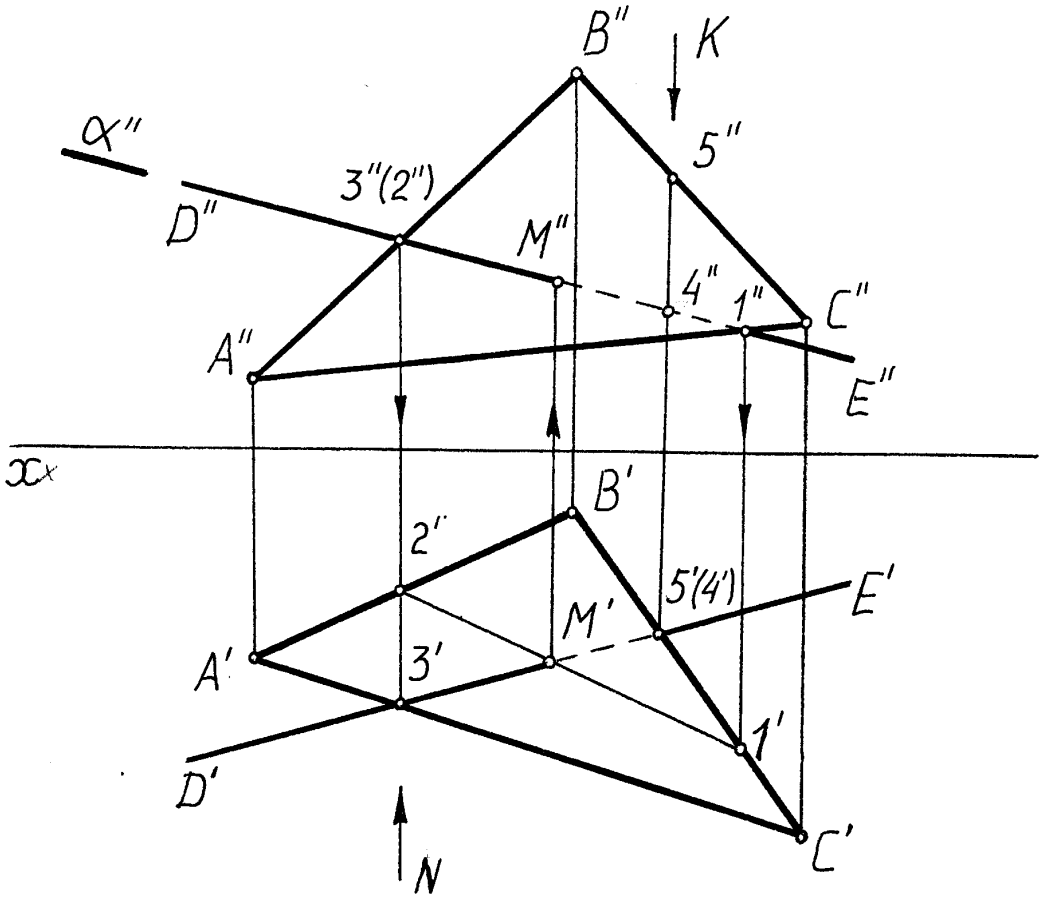


Рис. 2.19

2.6. Прямая и точка на плоскости.

К числу основных задач, решаемых на плоскости, относят: проведение любой прямой в плоскости, построение в плоскости некоторой точки, построение недостающей проекции точки, проверка принадлежности точки плоскости.

Решение этих задач основывается на известных положениях геометрии:

прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие плоскости;

через одну точку этой плоскости параллельно прямой, лежащей в этой плоскости или ей параллельной.

При этом используется известное условие, что если точка принадлежит плоскости, то ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой, принадлежащей плоскости.

2.6.1. Проведение любой прямой в плоскости.

Для этого достаточно (рис. 2.20) на проекциях плоскости взять проекции двух точек, например, А" , А' и 1" , 1', и через них провести А"1", А'1' проекции прямой А-1. На рис. 2.21 проекции В"1", В'1' прямой АВ проведены параллельно проекциям А"С", А'С' стороны АС треугольника, заданного проекциями А"В"С", А'В'С'. Прямая В-1 принадлежит плоскости, заданной треугольником АВС.

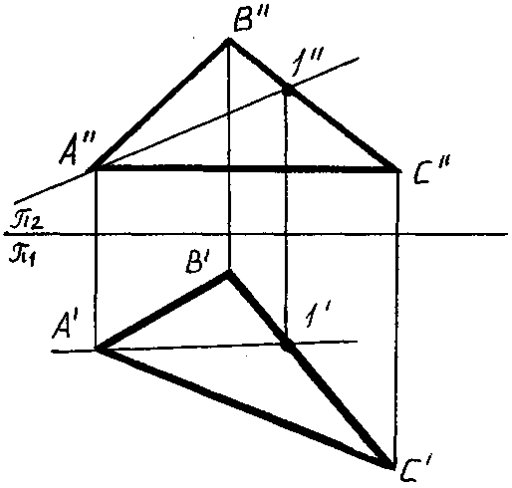


Рис. 2.20

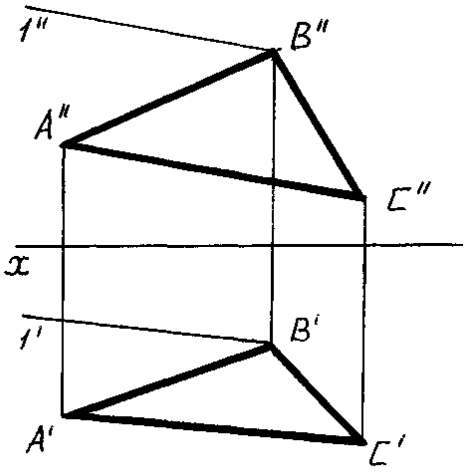


Рис. 2.21

2.6.2. Построение в плоскости некоторой точки.

Для решения данной задачи в плоскости проводят вспомогательную прямую и на ней отмечают точку. На чертеже (рис. 2.22) в плоскости, заданной проекциями точки А", А' и прямой В"С", В'С', проведены проекции А"1", А' 1' вспомогательной прямой, принадлежащей плоскости. На ней отмечены проекции точки D", D' , принадлежащей плоскости.

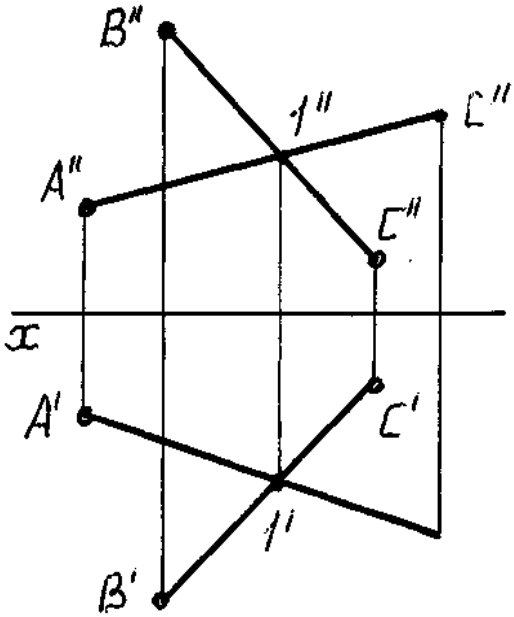


Рис. 2.22

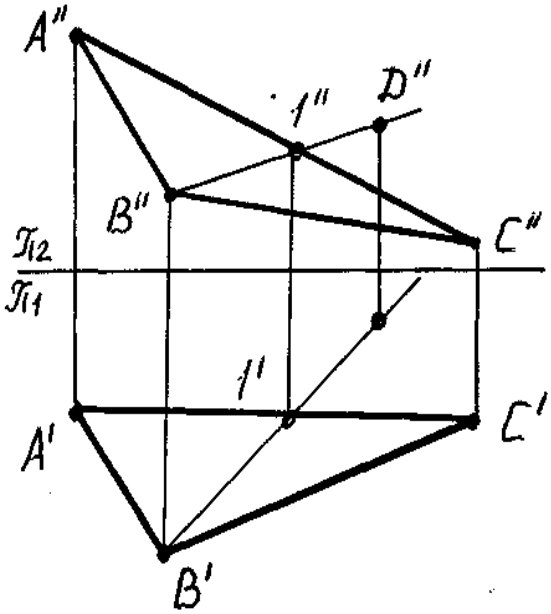


Рис.2.23

2.6.3. Построение недостающей проекции точки.

На рис. 2.23 плоскость задана проекциями треугольника A"B"C", A'B'C'. Принадлежащая этой плоскости точка D задана фронтальной проекцией D". Следует достроить горизонтальную проекцию точки D. Ее строят с помощью вспомогательной прямой, принадлежащей плоскости и проходящей через точку D. Для этого проводят, например, фронтальную проекцию прямой B"1", строят ее горизонтальную проекцию B'1' и на ней отмечают горизонтальную проекцию точки D'.

2.6.4. Проверка принадлежности точки плоскости.

Для проверки принадлежности точки плоскости используют вспомогательную прямую, принадлежащую плоскости. Так, на рис. 2.24 плоскость задана проекциями параллельных прямых A" B ", A' B' и C"D", C'D', точка - проекциями E", E'. Проекции вспомогательной прямой проводят так, чтобы она проходила через одну из проекций точки. Например, фронтальная проекция вспомогательной прямой 1"2" проходит через проекцию E". Построив горизонтальную проекцию вспомогательной прямой 1'2', убеждаемся, что горизонтальная проекция точки E' не принадлежит ей. Следовательно, точка E не принадлежит плоскости.

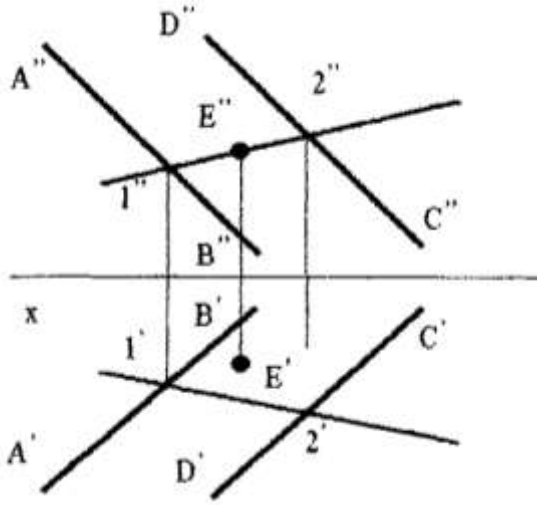


Рис.2.24