Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для
студентов технических специальностей

Минск 2010

ЛЕКЦИЯ 9
Глава 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

10.1. Способы построения линий пересечения

При пересечении многогранников может иметь место *проницание* одного многогранника другим (полное пересечение) и *врезание* (неполное пересечение).

При проницании получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоские (при проницании одной грани) и пространственные (при проницании двух и более граней). При врезании получается одна замкнутая пространственная ломаная линия пересечения.

Вершинами ломаной пересечения являются точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого и ребер второго с гранями первого. Звенья ломаной – это отрезки, по которым грани одного многогранника пересекают грани другого.

В соответствии с вышесказанным при решении задач используется один из следующих способов:

1) способ ребер, дающий возможность найти вершины ломаной линии пересечения (задачи на пересечение прямой линии с плоскостью);

2) способ граней, дающий возможность определить звенья ломаной линии пересечения (задачи на взаимное пересечение плоскостей).

Преимущество отдается тому из способов, который дает более простое решение. Иногда эти два способа целесообразно комбинировать. Следует отметить, что если проекция ребра одного многогранника не пересекает проекции контура другого, то данное ребро не пересекает другой многогранник. Однако пересечение проекций ребра одного многогранника с проекциями контура другого еще не означает, что ребро пересекает многогранник.

При определении видимости проекции линии пересечения следует учитывать, что видимой является та часть линии пересечения, которая находится на видимых проекциях граней обоих многогранников.

Рассмотрим случай пересечения пирамиды с призмой, боковая поверхность которой – фронтально-проецирующая (рис. 10.1).

Так как фронтальные проекции ребра AA_1 призмы и ребра SF пирамиды не пересекают контур другого многогранника, то при пересечении получается одна пространственная ломаная линия (случай врезания).

Грань AA_1B_1B призмы – горизонтальная плоскость α (α''), пересекающая боковую поверхность пирамиды по ломаной линии, звенья которой параллельны сторонам основания DEF пирамиды. По фронтальной проекции точки $1''$, расположенной на ребре SD пирамиды, найдем ее горизонтальную проекцию $1'$ и, проведя звенья ломаной линии, определим точки $2',3',4'$ ($1'2' \parallel D'E'$, $2'3' \parallel E'F'$, $1'4' \parallel D'F'$).

Горизонтальные проекции $5'$ и $6'$ точек пересечения ребер SE и SD с гранями призмы находятся с помощью линий связи. Горизонтальные проекции $7'$ и $8'$ точек пересечения ребра CC_1 призмы с поверхностью пирамиды определим с помощью горизонтальной плоскости β, проведенной через ребро CC_1 призмы.

Плоскость β (β') пересекает поверхность пирамиды по линиям, параллельным сторонам основания пирамиды. Спроецировав точку K, лежащую на ребре SD пирамиды, через проекцию K' проведем линии, параллельные $D'E'$ и $D'F'$. Эти линии пересекаются с горизонтальной проекцией ребра CC_1 призмы в точках $7'$ и $8'$.

Последовательно соединяя каждые пары точек пересечения одних и тех же граней отрезками прямых, получим замкнутую пространственную ломаную линию $1'2'3'5'7'6'8'4'1'$.

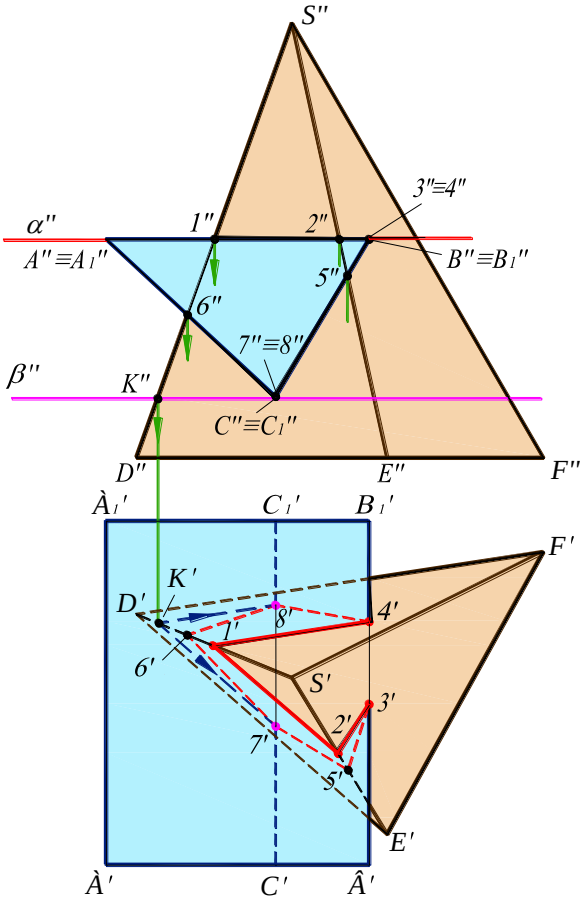


Рис. 10.1

Видимой будет часть этой линии 3′2′1′4′, расположенная на видимой грани AA_1B_1B.

На рис. 10.2 показано построение линии пересечения двух призм, боковые поверхности которых являются проецирующими (для призмы $ABCA_1\ B_1C_1$ – горизонтально-проецирующая, для призмы $DEFD_1E_1F_1$ – профильно-проецирующая).

Рассматривая положение горизонтальных и профильных проекций многогранников, отмечаем, что призма $DEFD_1E_1F_1$ проницает в боковую поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$. Следовательно, при пересечении получаются две замкнутые ломаные линии: одна из них – пространственная (пересекаются две грани призмы $ABCA_1\ B_1C_1$), другая – плоская (пересекается одна грань).

Горизонтальная проекция линий пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикальной призмы, а профильная – с профильной проекцией горизонтальной призмы.

Отмечая точки пересечения 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ горизонтальных проекций ребер $D'D_1'$,$E'E_1'$, $F'F_1'$ с горизонтальной проекцией призмы $ABCA_1B_1C_1$, при помощи линий связи находим их фронтальные проекции.

Фронтальные проекции 7″, 8″ точек пересечения ребра AA_1 с боковой поверхностью призмы $DEFD_1E_1F_1$ определим по линиям связи, используя их профильные проекции 7‴ и 8‴.

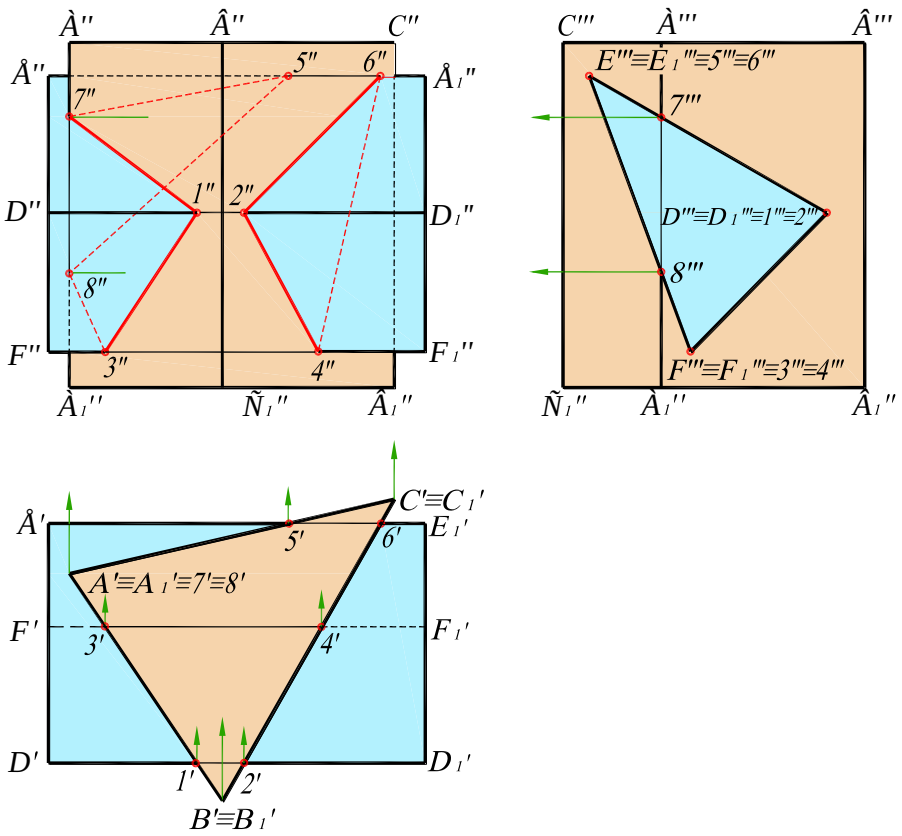


Рис. 10.2

Последовательно соединяя найденные точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, построим две ломаные линии 1–3–8–5–7–1 и 2–4–6–2.

Видимая часть линий пересечения расположена на видимых гранях обоих многогранников.

10.2. Примеры решения задач

Задача. Построить линию пересечения пирамиды с прямой призмой (рис. 10.3).

Решение. Рассматривая горизонтальные проекции многогранников, отметим, что имеет место проницание, так как все ребра пирамиды пересекаются поверхностью призмы. При этом одна из ломаных линий – плоская (поверхность пирамиды пересекается одной гранью призмы), другая – пространственная (в пересечении с пирамидой участвуют две грани призмы). Так как боковая поверхность призмы – горизонтально-проецирующая, то горизонтальные проекции точек пересечения 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ определятся в пересечении ребер пирамиды с боковыми гранями призмы. Их фронтальные проекции строятся с помощью линий связи на соответствующих ребрах пирамиды.

По горизонтальным проекциям многогранников видно, что только ребро EE_1 призмы пересекает грани пирамиды. Для определения точек пересечения его с пирамидой через это ребро и вершину S пирамиды проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость α (α′). Она пересекает грани пирамиды по прямым MS и NS. В пересечении фронтальных проекций $M''S''$ и $N''S''$ с проекцией $E''E_1''$ определяются точки пересечения (7 и 8) ребра EE_1 призмы с гранями SAB и SBC пирамиды.

Последовательно соединяя точки пересечения, принадлежащие одним и тем же граням, получим линии пересечения 1–2–3 и 4–6–8–5–7–4.

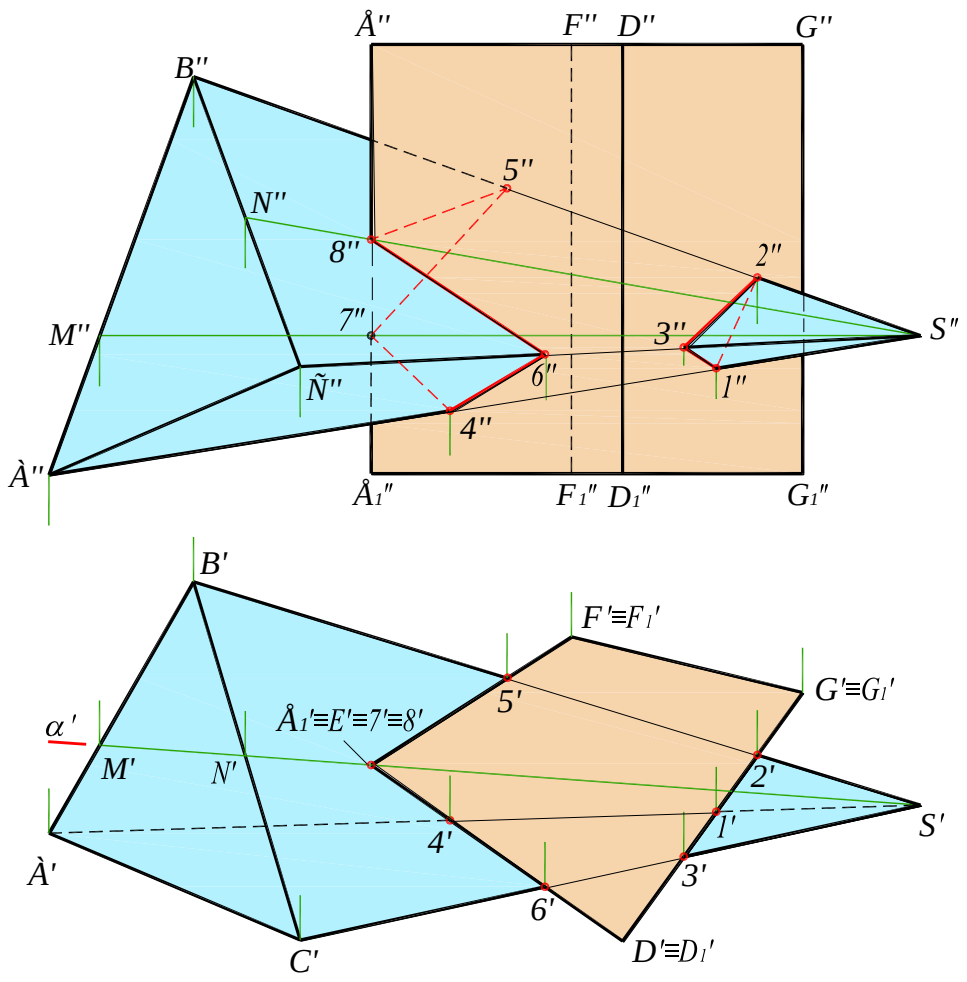


Рис. 10.3

Видимыми являются только те отрезки ломаных линий, которые принадлежат видимым граням обоих многогранников. Так, фронтальные проекции отрезков 1″3″, 2″3″, 4″6″, 6″8″ линий пересечения видимы. Отрезки 1″2″, 4″7″ принадлежат невидимой грани *SAB* пирамиды, отрезки 5″7″, 5″8″ расположены на невидимой грани EE_1F_1F призмы.

10.3. Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения многогранников?
2. В каком случае при пересечении многогранников получается проницание, врезание?
3. В чем заключается способ ребер и способ граней?
4. В какой последовательности соединяются точки пересечения ребер и граней многогранников?
5. Как определяется видимость линии пересечения многогранников?

Глава 11. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С МНОГОГРАННИКАМИ

11.1. Способы построения линии пересечения поверхностей

Линия пересечения многогранника с телом вращения в общем случае состоит из отдельных участков кривых линий, получающихся при пересечении граней многогранника с поверхностью вращения. Точки перехода от одного участка к другому находятся на пересечении ребер многогранника с телом вращения и называются точками излома. Участок линии пересечения может быть и прямой линией в случае пересечения линейчатой поверхности вращения гранью многогранника по образующей.

При проницании (полном пересечении) получаются две замкнутые линии пересечения. Они могут быть плоскими (поверхность вращения проницает одну грань) или пространственными, состоящими из нескольких плоских кривых с точками излома в местах пересечения поверхности вращения ребрами многогранника.

При врезании (неполном пересечении) получается одна замкнутая пространственная линия.

Таким образом, в соответствии с указанным выше, задачи данной темы решаются по следующему плану:

- Определяются точки излома линии пересечения, являющиеся точками пересечения ребер многогранника с поверхностью вращения.
- Находятся точки, принадлежащие линиям пересечения отдельных граней многогранника с телом вращения. При этом сначала следует найти характерные (опорные) точки кривых. Это точки, проекции которых отделяют видимую часть проекции линии пересечения от невидимой, а также это проекции наивысших и наинизших точек линии пересечения, ближайших и наиболее удаленных, крайних слева и справа на проекциях линии пересечения.
- Определение видимости линии пересечения поверхностей и их очерков. Видимость проекций участков линии пересечения определяется из условия расположения их на видимой стороне каждой поверхности.

При построении точек линии пересечения многогранников с телами вращения используют вспомогательные секущие плоскости. Их располагают так, чтобы они пересекали данные поверхности по простым для построения линиям (прямым или окружностям).

Рассмотрим построение линии пересечения поверхности прямой трехгранной призмы с поверхностью цилиндра вращения (рис. 11.1). Боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, а ось цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций.

По горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеем проницание цилиндра призмой, и линия пересечения состоит из двух замкнутых симметричных частей (на рисунке приведены обозначения точек только одной ее части).

Грань призмы BB_1C_1C параллельна оси цилиндра и пересекает поверхность цилиндра по прямой 2–3 (образующая цилиндра).

Грани AA_1B_1B и AA_1C_1C наклонены к оси цилиндра и пересекают его поверхность по кривым (частям эллипсов).

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы, а профильная проекция совпадает с проекцией боковой поверхности цилиндра.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 1, 2, 3 ребер призмы с поверхностью цилиндра (фронтальные проекции этих точек определяем с помощью линий связи, проведенных через их профильные проекции). Точки 4 и 5, находящиеся на верхней образующей цилиндра, разграничивают фронтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части (фронтальные проекции этих точек

определим с помощью линий связи, проведенных через соответствующие горизонтальные проекции).

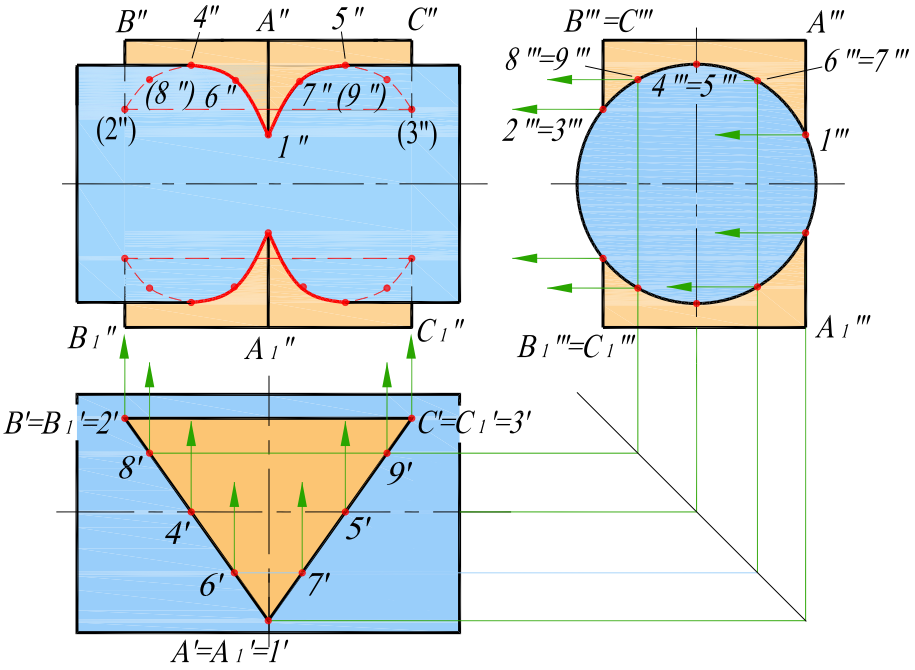


Рис. 11.1

Построение промежуточных точек 6, 7, 8, 9 выполняем следующим образом. На одной из имеющихся проекций линии пересечения (горизонтальной или профильной) намечаем проекции точек и с помощью линий связи строим недостающие проекции.

По построенным точкам проводим фронтальную проекцию линии пересечения. Видимой является часть 4″6″1″7″5″, расположенная на видимой проекции цилиндра. Часть фронтальных проекций ребер BB_1 и CC_1 закрывается очерком цилиндра.

На рис. 11.2, *а* построена линия пересечения поверхности конуса вращения с поверхностью прямой четырехгранной призмы $ABCDA_1B_1F_1D_1$. Боковые ребра призмы являются профильно-проецирующими прямыми, а ось конуса перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций.

Из профильной проекции видно, что имеет место врезание, так как ребро BB_1 призмы не пересекает конус. Линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную линию и состоит из четырех участков кривых второго порядка. Грань AA_1B_1B пересекает боковую поверхность конуса по эллипсу, грань BB_1C_1C – по гиперболе, грань CC_1D_1D – по окружности, грань AA_1D_1D – по параболе.

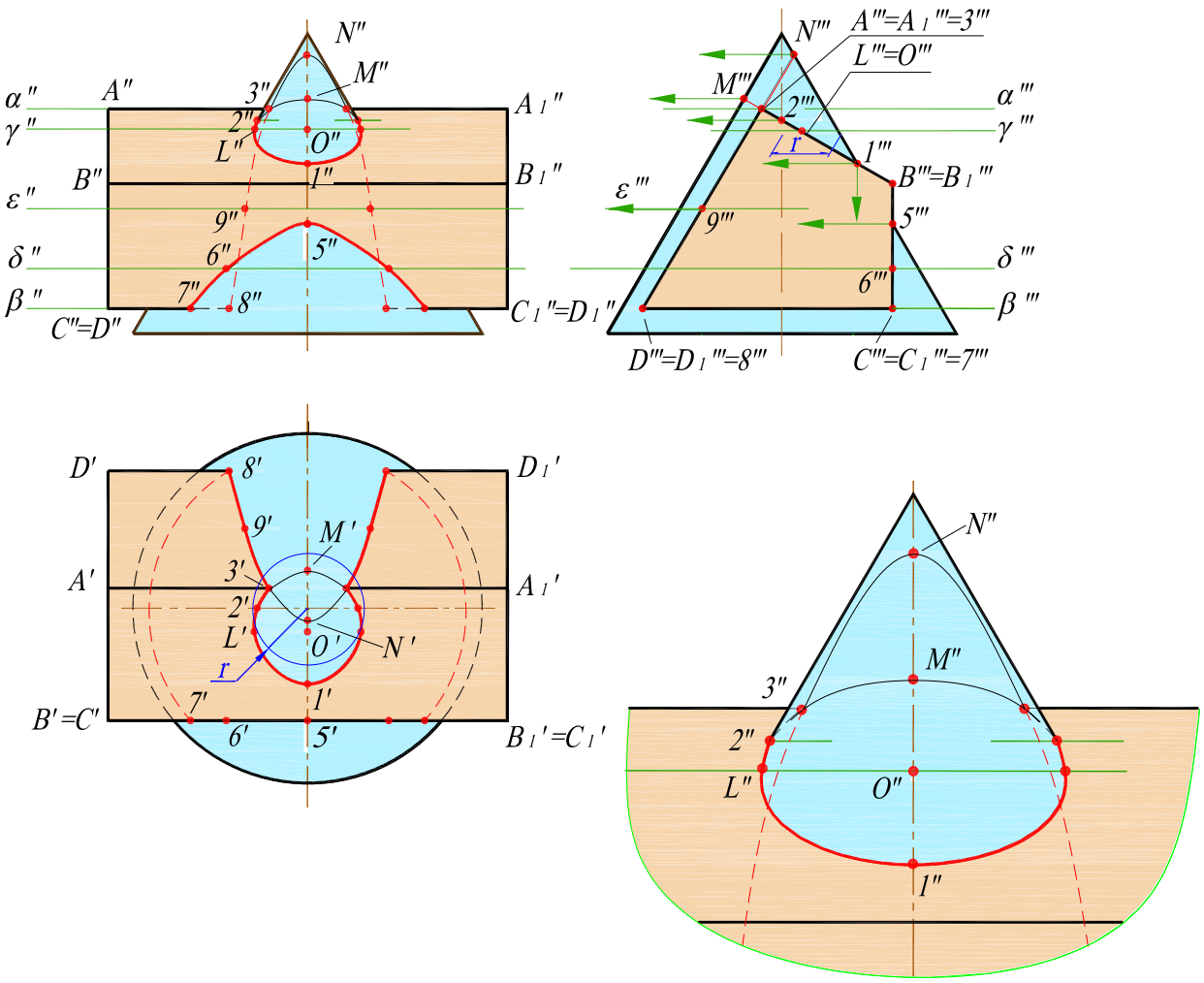
Профильная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения 3, 7, 8 ребер призмы с поверхностью конуса. Для этого через ребра AA_1, CC_1, DD_1 проведены горизонтальные плоскости α (α″) и β (β″), пересекающие конус по окружностям (параллелям).

На рис 11.2, *а* приведено обозначение точек лишь одной симметричной части линии пересечения.

Плоскость β позволяет определить также дуги окружности, по которым грань CC_1D_1D пересекает конус. Ребро BB_1 пересекает конус в точке 7, а ребро DD_1 – в точке 8.

Характерными точками эллипса, по которому плоскость грани AA_1BB_1 пересекает боковую поверхность конуса, являются точки 1, 2, *M*, *L*. Построение этих точек начинается с профильных проекций. Высшая *M* и низшая 1 определяют малую ось фронтальной проекции эллипса и большую ось горизонтальной. Середина (точка *O*) отрезка *M*1 является центром эллипса.



а *б*

Рис. 11.2

С помощью горизонтальной плоскости γ (γ″, γ‴) проведенной через точку *O* (параллель радиуса *r*) находится точка *L*, определяющая малую ось горизонтальной проекции эллипса и большую ось фронтальной проекции. Проекция 2″ точки 2, находящейся на фронтальной очерковой образующей конуса, разделяет фронтальную проекцию эллипса на видимую и невидимую.

Вершина гиперболы (точка 5), по которой грань BB_1C_1C пересекает поверхность конуса, определяется по профильной проекции 5‴.

Построение точки 7, принадлежащей и гиперболе, и окружности, приведено выше. Промежуточная точка 6 построена с помощью горизонтальной плоскости δ (δ″, δ‴), сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной.

Вершина параболы (точка *N*), по которой плоскость грани AA_1DD_1 пересекает поверхность конуса, находится за пределами грани и определяется по ее профильной проекции. Построение точек 3 и 8, принадлежащих параболе, а также эллипсу и окружности, приведены ранее. Промежуточная точка 9 определена сначала на горизонтальной проекции, а затем на фронтальной с помощью горизонтальной плоскости ε (ε″, ε‴). Видимость проекций линии пересечения определяется видимостью граней призмы и поверхности конуса. Следует отметить, что часть ребра AA_1 на фронтальной проекции до точки 3 закрывается контуром конуса.

На рис. 11.2, *б* показано увеличенное изображение части фронтальной проекции.

На рис.11.3 приведено построение линии пересечения сферы с прямой трехгранной призмой. Боковые ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций.

Из горизонтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проницание сферы призмой. Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Характерными точками линии пересечения являются точки 1 и 2 – точки пересечения ребер призмы со сферой (обозначение точек линии пересечения приведено лишь на одной симметричной части). Для построения этих точек использованы фронтальные плоскости α и β, проведенные через ребра призмы и пересекающие сферу по окружностям радиусов R и R_1.

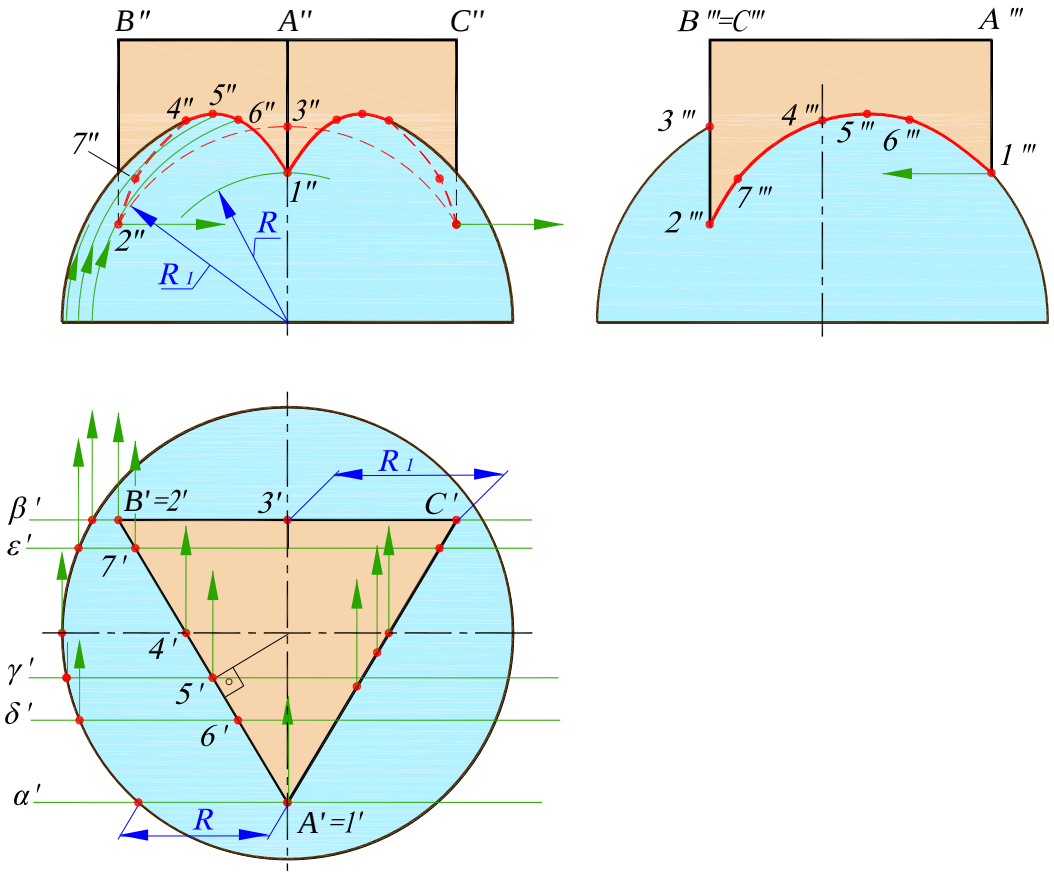


Рис. 11.3

Фронтальную проекцию 1″ точки 1 можно определить и по профильной проекции с помощью линий связи. Так как грань призмы *BC* является фронтальной плоскостью, то плоскость β (β′) позволяет определить дугу окружности, по которой она пересекает сферу. Точка 3 – высшая точка этой дуги.

Грани *AB* и *AC* призмы пересекают сферу по дугам окружностей, которые на фронтальную и профильную плоскости проекций проецируются в виде частей эллипсов. Фронтальная проекция линии пересечения этих граней представляет собой две симметричные части, а профильные проекции совпадают.

Характерными точками фронтальной проекции линии пересечения являются также точки 4″ и 5″. Точка 4 разделяет линию на видимую и невидимую части, точка 5 – высшая точка линии пересечения. Проекция 4″ находится на очерке сферы – фронтальном меридиане, проекция 5″ определена с помощью фронтальной плоскости γ (γ′).

Для построения промежуточных точек 6″ и 7″ фронтальной проекции использованы фронтальные плоскости δ (δ′) и ε (ε′). Каждая из фронтальных плоскостей пересекает сферу по окружности определенного радиуса, а призму – по горизонтально-проецирующим прямым.

Видимой частью фронтальной проекции линии пересечения является часть эллипса 1″6″5″4″, на профильной проекции симметричные части линии пересечения изображаются

видимой линией. На фронтальной проекции части ребер *B* и *C* закрываются контуром сферы.

11.2. Примеры решения задач

Задача 1. Построить линию пересечения поверхности тора с поверхностью трехгранной призмы (рис. 11.4).

Решение. Боковые грани призмы являются фронтально-проецирующими плоскостями, и фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией боковой поверхности призмы. Из фронтальной проекции видно, что в данном случае имеет место проницание тора призмой (две замкнутые линии пересечения).

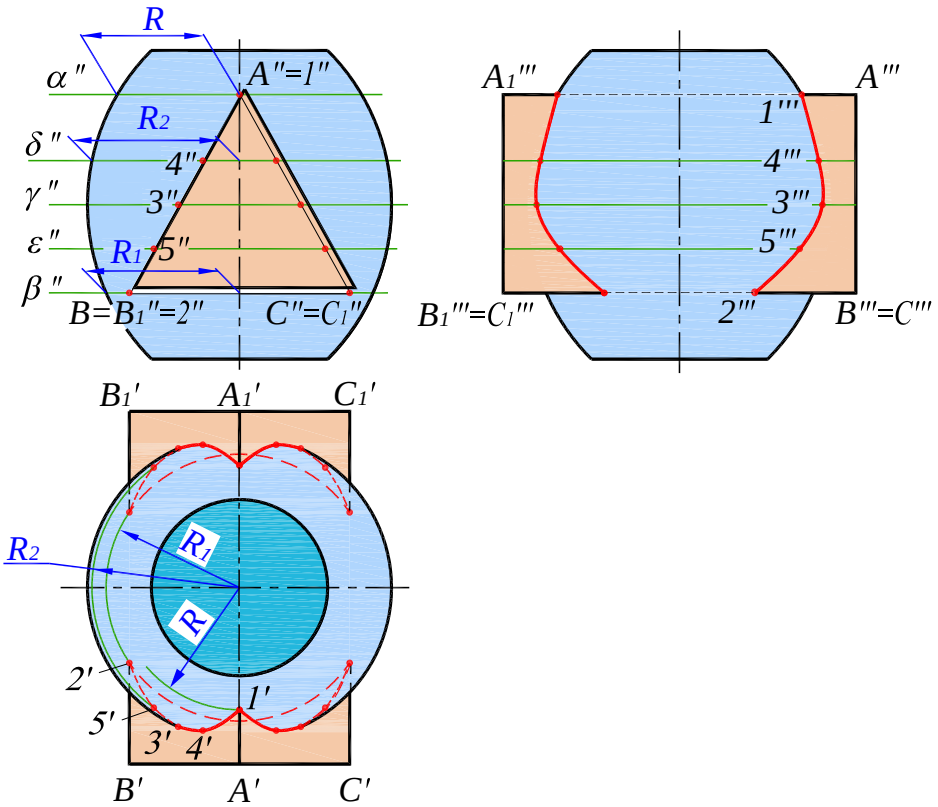


Рис. 11.4

Характерными точками линии пересечения являются точки 1, 2, 3 (обозначение точек линии пересечения приведено для одной симметричной части). Для построения горизонтальных проекций точек 1 и 2, в которых ребра призмы пересекают поверхность тора, использованы горизонтальные плоскости α (α″) и β (β″). Эти плоскости пересекают призму по фронтально-проецирующим прямым, а тор – по окружностям радиусов R и R_1.

Плоскость β (β″) позволяет определить дугу окружности, по которой горизонтальная грань BB_1C_1C пересекает поверхность тора.

С помощью горизонтальной плоскости γ, пересекающей тор по экватору, определим горизонтальную проекцию точки 3. Проекция 3′ разделяет горизонтальную проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части.

Для нахождения горизонтальных проекций точек 4 и 5 использованы горизонтальные плоскости δ (δ″) и ε (ε″). Эти плоскости пересекают поверхность призмы по фронтально-проецирующим прямым, а тор – по окружностям одинакового радиуса R_2.

Профильная проекция линии пересечения строится по точкам, определяемым с помощью линий связи.

Видимой частью горизонтальной проекции линии пересечения является часть кривой 1′4′3′, расположенная на верхней части тора и видимых гранях призмы. На профильной проекции симметричные части линии пересечения совпадают и изображаются видимой линией.

Задача 2. Построить линию пересечения правильной треугольной пирамиды и цилиндра вращения (рис. 11.5).

Решение. Из горизонтальной проекции видно, что в данном примере имеет место проницание цилиндром поверхности пирамиды. Одна часть линии пересечения состоит из трех плоских кривых (частей эллипсов), по которым грани пирамиды пересекают боковую поверхность цилиндра. Вторая часть линии пересечения вырождается в точку *S*, так как вершина пирамиды находится на верхнем основании цилиндра. Поскольку пирамида является правильной и ее высота совпадает с осью цилиндра, то все участки линии пересечения одинаковы.

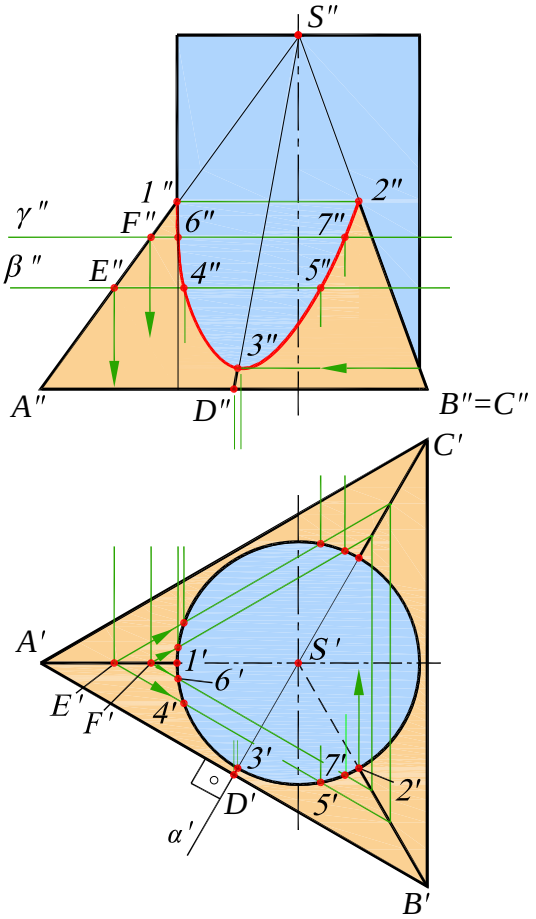


Рис. 11.5

Боковая поверхность цилиндра вращения – горизонтально-проецирующая, поэтому горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра.

Грани пирамиды *SAB* и *SAC* являются плоскостями общего положения с совпадающими фронтальными проекциями. Поэтому фронтальные проекции линии пересечения этих граней с цилиндром (части эллипсов) совпадают. Грань *SBC* является фронтально-проецирующей плоскостью, и фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом-проекцией этой грани.

Характерными точками линии пересечения являются точки пересечения ребер пирамиды с поверхностью цилиндра. Ребро *SA* пересекает очерковую образующую цилиндра в точке 1, так как ребро и образующая расположены в одной фронтальной плоскости. Фронтальные проекции точек пересечения ребер *SB* и *SC* с поверхностью цилиндра совпадают (2″) и находятся на одной горизонтальной прямой с проекцией 1″. Фронтальная проекция точки 2 может быть построена и с помощью линии связи, проведенной из горизонтальной проекции 2′.

К другим характерным точкам относятся низшие точки, в которых грани пирамиды пересекают поверхность цилиндра. Эти точки находятся с помощью вспомога-

тельных плоскостей, проходящих через ось цилиндра и пересекающих грани по линии наибольшего ската. Так, для построения фронтальной проекции точки 3 использована плоскость α (α'), пересекающая пирамиду по прямой *SD* , а цилиндр – по образующей. Проекция $3''$ находится на одной горизонтальной прямой с точкой пересечения фронтально-проецирующей грани *SBC* и очерковой образующей цилиндра.

Для нахождения фронтальных проекций промежуточных точек 4, 5, 6 ,7 использованы горизонтальные плоскости β (β'') и γ (γ''), пересекающие цилиндр по окружностям, а пирамиду – по треугольникам. В пересечении их горизонтальных проекций получаются горизонтальные проекции $4'$, $5'$, $6'$,$7'$этих точек. Фронтальные проекции определяются с помощью линий связи на фронтальных проекциях вспомогательных плоскостей.

11.3. Вопросы для контроля

1. Что представляет собой линия пересечения тела вращения с многогранником?
2. Какие точки являются характерными при построении линии пересечения?
3. Как определяется видимость участков линии пересечения?