Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для
студентов технических специальностей

Минск 2010

ЛЕКЦИЯ 8
Глава 9
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С МНОГОГРАННИКАМИ И КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Точки пересечения прямой линии с геометрическими телами называют также точками встречи, одна из них является точкой входа, другая – точкой выхода.

9.1. Частные случаи определения точек пересечения

Частный способ определения указанных точек состоит в том, что одна из проекций точки пересечения принадлежит «вырожденной» проекции поверхностей или прямой, а другая определяется из условия принадлежности точки прямой или поверхности.

На рис. 9.1 показано построение точек пересечения прямых линий *a* и *b* с поверхностью четырехугольной прямой призмы. Боковая поверхность призмы – проецирующая (боковые грани перпендикулярны к горизонтальной плоскости проекций). Поэтому горизонтальные проекции K_1', K_2', K_3' точек пересечения находятся на «вырожденных» проекциях боковых граней. Фронтальные проекции этих точек определяются по линиям связи на фронтальных проекциях прямых *a″* и *b″*. Вторая точка пересечения (точка K_4) прямой *b* находится на пересечении с верхним основанием призмы, которое является горизонтальной плоскостью. Сначала отмечаем фронтальную проекцию K_4'', а затем по линии связи находим горизонтальную K_4'.

Видимость фронтальных проекций точек пересечения прямых *a* и *b* определяется видимостью граней, на которых лежат указанные точки. Так, точка K_1 лежит на невидимой грани ABB_1A_1 и поэтому участок прямой *a* от проекции K_1 до ребра AA_1 невидим. Участки прямых, расположенных внутри тел, изображаются невидимыми. Участок горизонтальной прямой *b* от точки K_4' видим, так как точка K_4 расположена на верхнем основании призмы.

На рис. 9.2 показано построение точек пересечения прямых *a* и *b* с поверхностью цилиндра вращения.

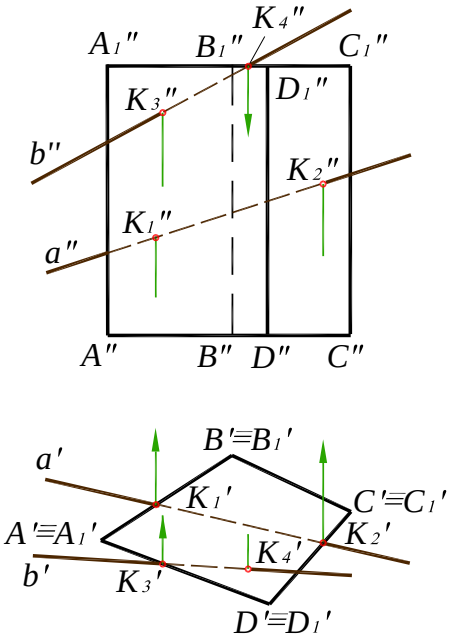


Рис. 9.1

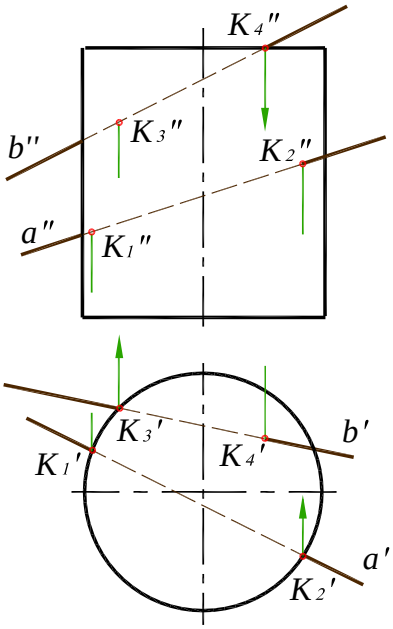


Рис. 9.2

Горизонтальные проекции точек K_1, K_2, K_3 находятся на пересечении окружности (горизонтальной проекции боковой поверхности цилиндра) с проекциями прямых, фрон-

тальная проекция точки K_4 – на пересечении горизонтальной плоскости верхнего основания с проекцией прямой. При определении видимости фронтальных проекций прямых *a* и *b* следует учесть, что проекции K_1'' и K_3'' расположены на невидимой части цилиндра и поэтому участки прямых *a* и *b* от проекций K_1'' и K_3'' до очерковой образующей невидимы. Горизонтальная проекция точки K_4 расположена на верхнем основании цилиндра, поэтому проекция b' до точки K_4' видима.

На рис. 9.3 показано построение точек пересечения проецирующих прямых *a* и *b* с поверхностью пирамиды. Фронтальные проекции K_1'' и K_2'' точек пересечения фронтально-проецирующей прямой *a* совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, а горизонтальные проекции находятся на прямых *S*1 и *S*2 граней *SAD* и *SAB*.

Горизонтальные проекции точек пересечения K_3 и K_4 горизонтально-проецирующей прямой *b* совпадают с «вырожденной» проекцией прямой, фронтальная проекция точки K_3 находится на прямой *S*3 грани *SCD*. Точка K_4 находится на горизонтальной плоскости основания пирамиды.

На рис. 9.4 показано построение точек пересечения проецирующих прямых *a* и *b* с поверхностью конуса вращения. Проекции K_1' и K_2' определяются с помощью параллели (окружности радиуса *R*) конуса, проекция K_3''– с помощью образующей *S*2. Точка K_4 расположена на горизонтальной плоскости основания конуса.

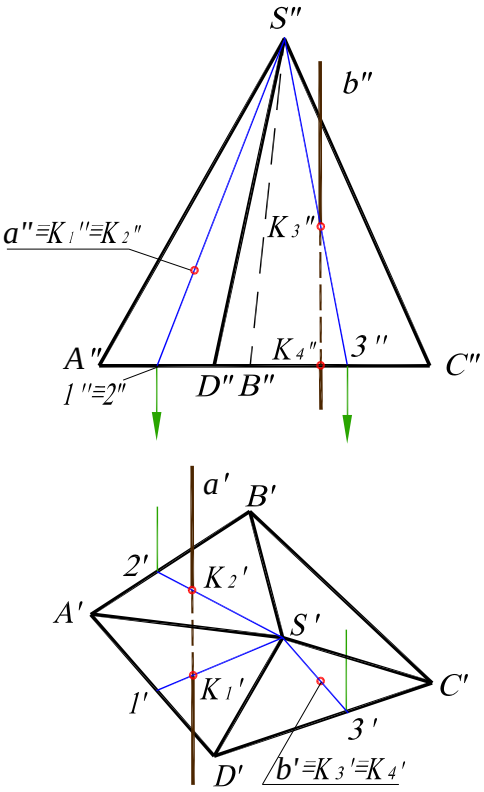


Рис. 9.3

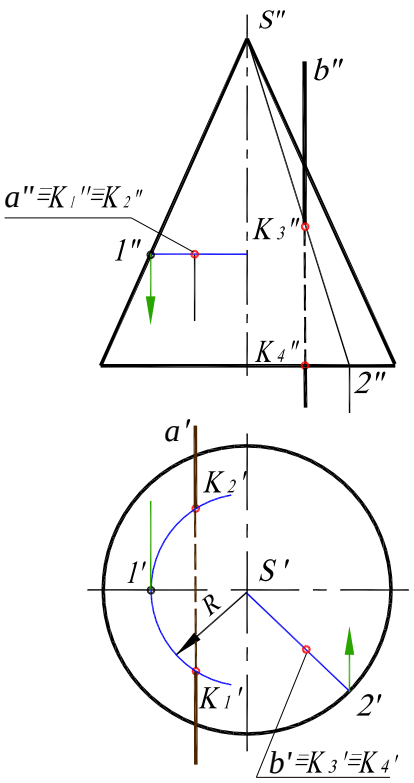


Рис. 9.4

На рис. 9.5 для нахождения горизонтальных проекций точек пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 проецирующих прямых *a* и *b* с поверхностью сферы использованы параллели (окружности) сферы. Точки K_1 и K_2 находятся на параллели радиуса R_1, а точки K_3 и K_4 – на параллели радиуса R_2. Точки пересечения K_1, K_2, K_3, K_4 расположены на видимых участках проекций сферы.

9.2. Общий способ определения точек пересечения

В общем случае определение точек пересечения прямой линии с поверхностью геометрических тел аналогично тому, как решается задача на пересечение прямой линии с плоскостью, и заключается в следующем:

- через данную прямую проводим вспомогательная плоскость;
- строим линию пересечения геометрического тела вспомогательной плоскостью;
- определяем искомые точки пересечения построенной линии с данной прямой;
- определяем видимость участков прямой линии.

Вспомогательную секущую плоскость выбирают так, чтобы она пересекала поверхность геометрического тела по линии, легко определяемой на чертеже, например, состоящей из прямых или окружностей.

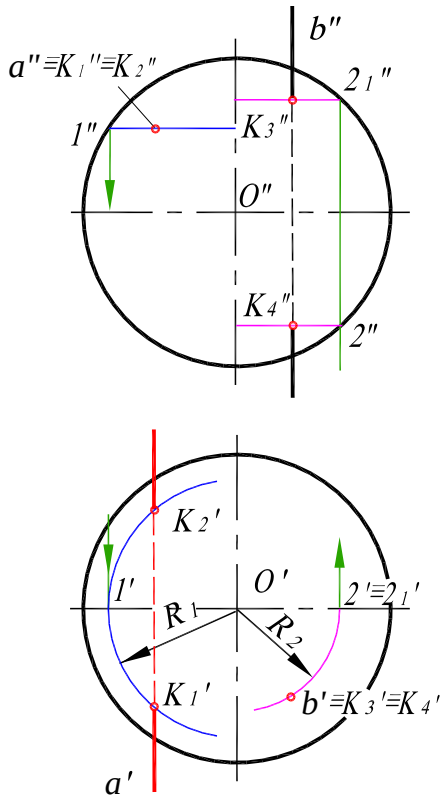
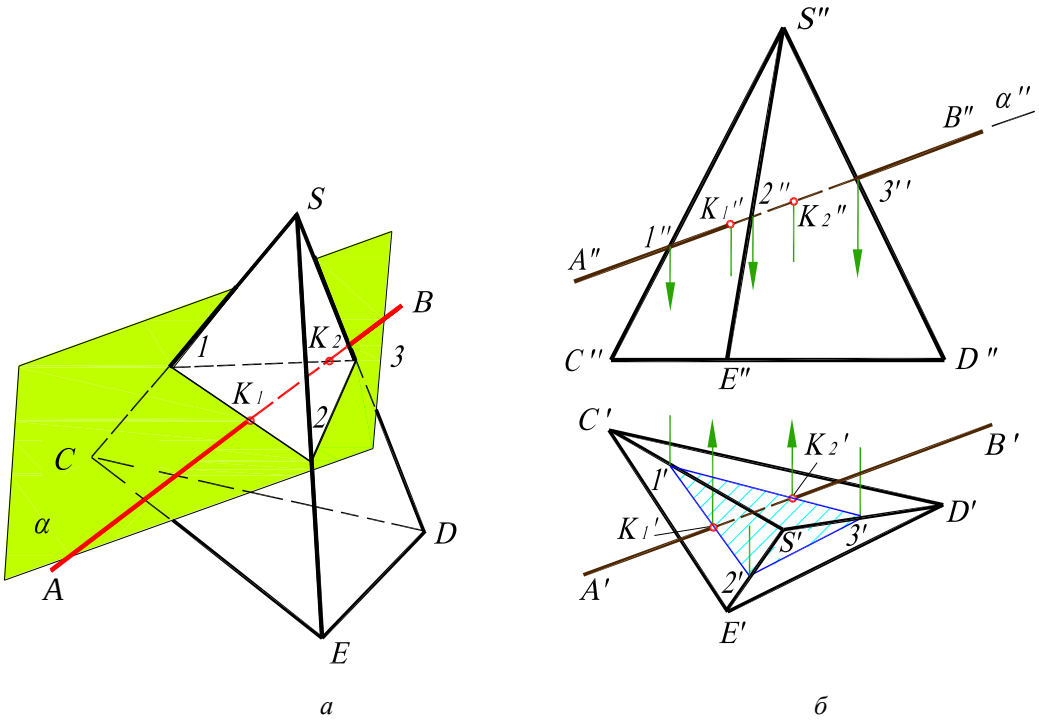


Рис. 9.5

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость, проходящую через заданную прямую. В этом случае построение линии пересечения поверхности с проецирующей плоскостью значительно упрощается.

На рис. 9.6 показано нахождение точек пересечения прямой общего положения *AB* с поверхностью пирамиды *SCDE*. Через прямую *AB* проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость α, пересекающая поверхность пирамиды по линии 1–2–3. На пересечении этой линии с прямой *AB* находятся искомые точки пересечения. Видимость участков прямой линии определяется видимостью граней, на которых лежат точки пересечения K_1 и K_2. Так, на горизонтальной проекции (рис. 9.6, *б*) точки K_1 и K_2 расположены на видимых проекциях *S'C'E'* и *S'C'D'* граней *SCE* и *SCD*, а на фронтальной проекции точка K_2 лежит на невидимой грани *SCD*. Поэтому участок фронтальной проекции *AB* от K_2 до ребра *SD* невидим.



а *б*

Рис. 9.6

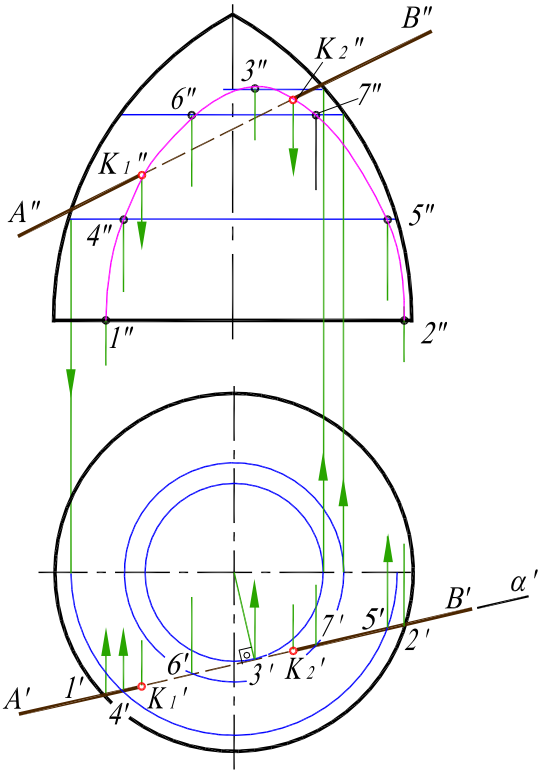


Рис. 9. 7

На рис. 9.7 определены точки пересечения поверхности вращения с прямой *AB*. Через прямую *AB* нельзя провести вспомогательную плоскость, пересекающую поверхность по окружности. Горизонтально-проецирующая плоскость α (α′) пересекает поверхность вращения по плоской кривой линии. Поэтому использована одна из проецирующих плоскостей – горизонтально-проецирующая плоскость α.

Для получения фронтальной проекции кривой найдены опорные точки 1, 2, 3 и промежуточные 4, 5, 6, 7. Точки 1 и 2 находятся на плоскости основания, а точки 3, 4, 5, 6 ,7 – на параллелях (окружностях) поверхности вращения.

Фронтальные проекции K_1'' и K_2'' определяются на пересечении полученной кривой и прямой *AB*. Горизонтальные проекции точек пересечения находятся при помощи линий связи.

Точки пересечения K_1 и K_2 расположены на видимых частях поверхности вращения.

Для нахождения точек пересечения конуса вращения с горизонтальной прямой *AB* (рис. 9.8) использована вспомогательная горизонтальная плоскость α (α″), пересекающая конус по окружности. Для определения точек пересечения сферы с фронтальной прямой *AB* использована фронтальная плоскость α (α′) (рис. 9.9). При определении видимости участков прямых следует учитывать, что фронтальная проекция точки K_2 расположена на невидимой части конуса, а горизонтальная проекция точки K_2 – на невидимой части сферы.

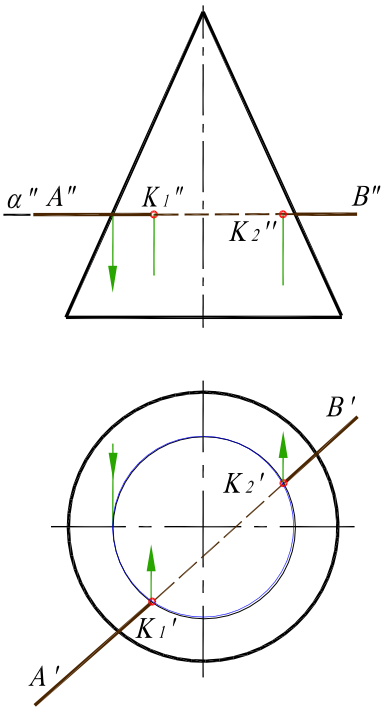


Рис. 9.8

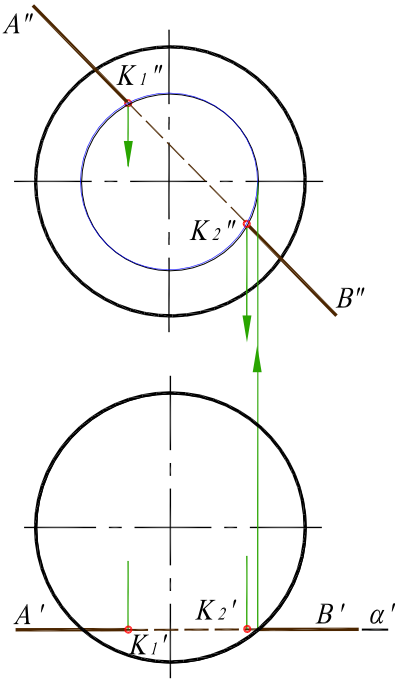


Рис. 9.9

В некоторых случаях при определении точек пересечения прямой с поверхностью целесообразно применять плоскость общего положения. Так, при пересечении конуса с прямой общего положения (рис. 9.10) применение проецирующих плоскостей приводит к построению кривых, которые нужно строить по точкам.

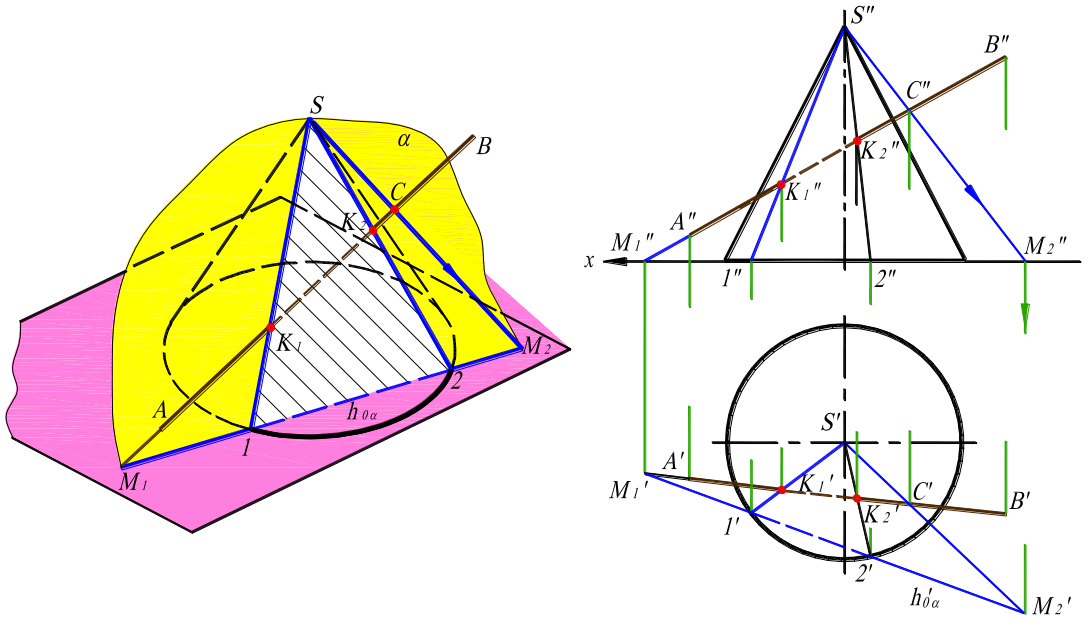


Рис. 9.10

Если же вспомогательную плоскость α провести через прямую *AB* и вершину конуса *S*, то она пересечет конус по двум образующим *S*1 и *S*2. Эта плоскость уже не будет проецирующей, она будет плоскостью общего положения. Для определения образующих, по которым вспомогательная плоскость α пересечет конус, находится горизонтальный след $h_{0\alpha}$ на плоскости основания конуса. Плоскость основания конуса принята за плоскость проекций π_1. Для построения следа $h_{0\alpha}$ найден горизонтальный след M_1 прямой *AB* и горизонтальный след M_2 вспомогательной прямой *SC* (*C* – произвольная точка на прямой *AB*). След $h_{0\alpha}$ пересекает окружность основания конуса в точках 1 и 2, через которые проходят образующие *S*1 и *S*2. В пересечении образующих *S*1 и *S*2 с прямой *AB* находятся искомые точки пересечения K_1 и K_2. При нахождении видимости участков прямой линии руководствуются тем, что точки K_1 и K_2 расположены на видимых частях проекций конуса.

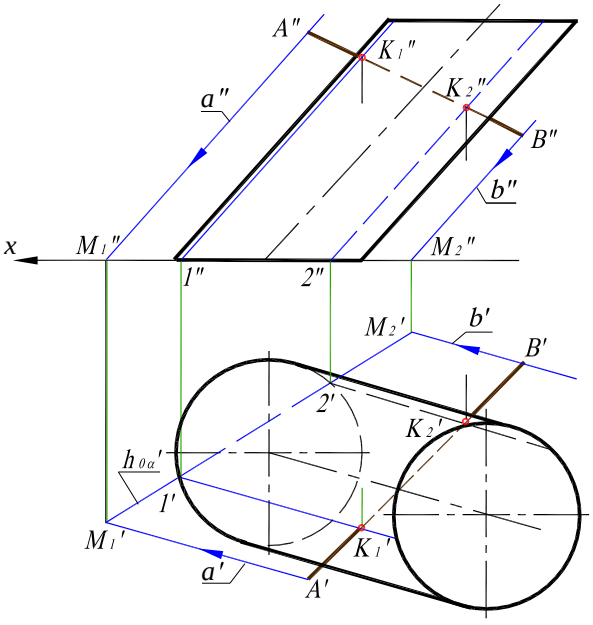


Рис. 9.11

Вспомогательная плоскость α общего положения использована при определении точек пересечения прямой *AB* общего положения с поверхностью наклонного цилиндра с круговым основанием (рис. 9.11). Плоскость α проводится через прямую *AB* параллельно образующим цилиндра. Для определения горизонтального следа $h_{0\alpha}$ на плоскости нижнего основания цилиндра проведены прямые *a* и *b* через точки *A* и *B* параллельно образующим цилиндра. Точки пересечения 1′ и 2′ горизонтального следа $h_{0\alpha}'$ с окружностью основания определяют образующие цилиндра, по которым вспомогательная плоскость пересекает поверхность цилиндра. В пересечении этих образующих с прямой *AB* находятся искомые точки K_1 и K_2.

При определении видимости проекций точек пересечения руководствуются видимостью проекций образующих, на которых расположены точки K_1 и K_2. Точка K_1 находится на видимых проекциях образующей, точка K_2 – на невидимых.

На рис. 9.12 показано построение точек пересечения прямой AB общего положения со сферой радиуса R с центром в точке O.

Через прямую AB проведена горизонтально-проецирующая плоскость α, которая пересекает сферу по окружности радиуса R_1. Для того чтобы избежать проецирования этой окружности на фронтальную плоскость проекций π_2 (проекция – эллипс), задача решается способом перемены плоскостей проекций.

Преобразуем систему π_1/π_2 в новую π_1/π_4, при этом плоскость π_4 параллельна прямой AB. Проведя новую ось проекций x_1 параллельно $A'B'$, находим положение прямой AB и центра сферы O на плоскости проекций π_4 – проекции $A^{IV}B^{IV}$ и O^{IV}.

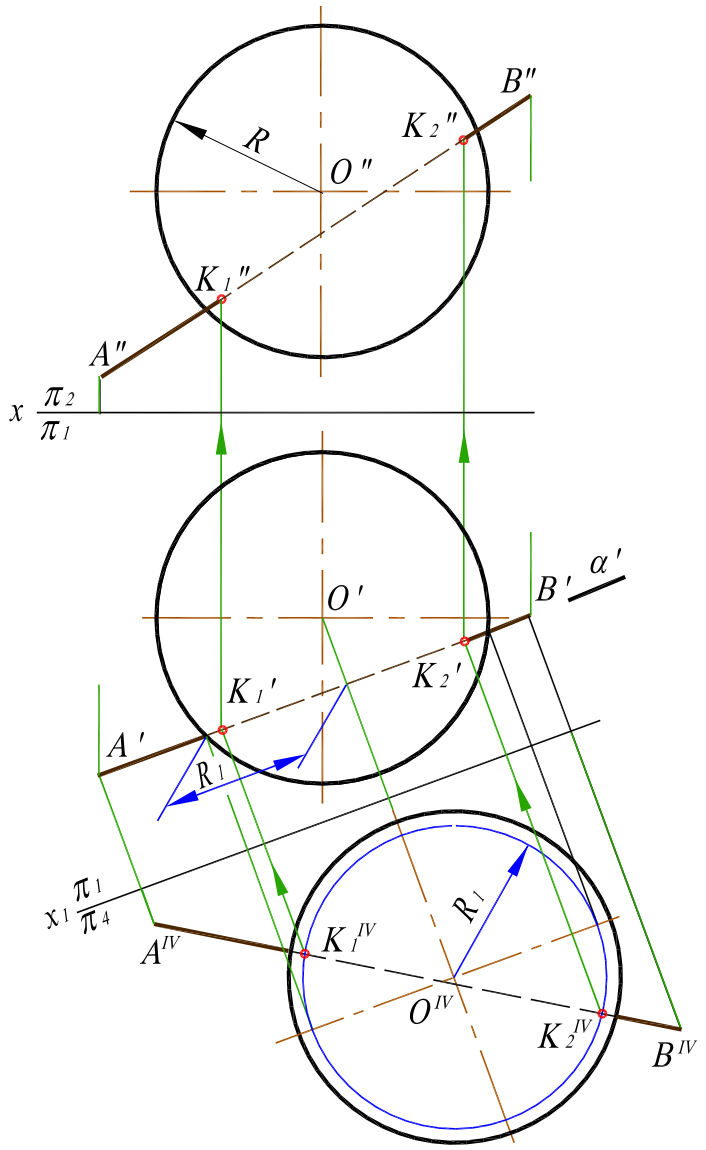


Рис. 9.12

В результате преобразования прямая AB заняла положение, параллельное плоскости π_4, и окружность радиуса R_1 проецируется на π_4 без искажения. В пересечении проекции $A^{IV}B^{IV}$ и окружности радиуса R_1 определяются проекции точек пересечения K_1 и K_2.

Проекции точек пересечения на плоскости π_1 и π_2 находятся при помощи линий связи. При определении видимости участков прямой AB следует учитывать, что горизонтальная проекция K_1' точки K_1 расположена на невидимой части сферы.

9.3. Примеры решения задач

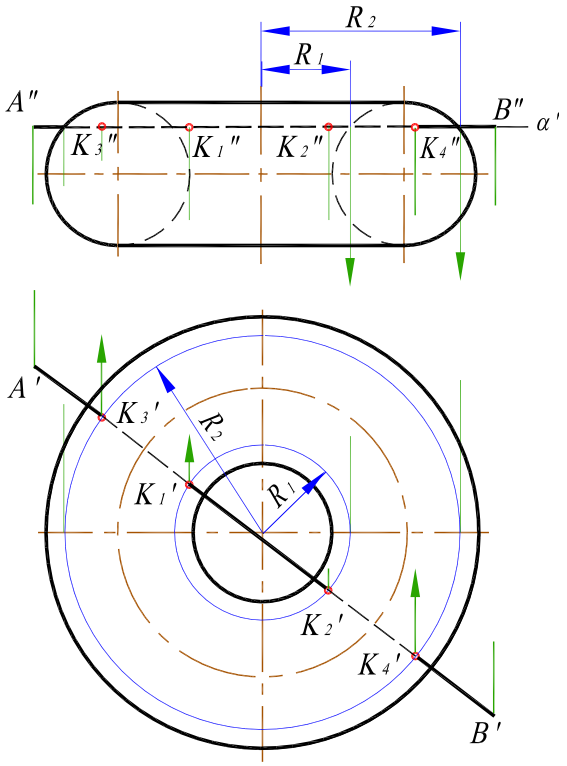


Рис. 9.13

Задача 1. Построить точки пересечения прямой *AB* с поверхностью кругового кольца (рис. 9.13).

Решение. Так как прямая *AB* – горизонтальная, то для построения точек пересечения применим вспомогательную горизонтальную плоскость α (α″). Плоскость α пересекает поверхность кругового кольца по двум параллелям (окружностям) радиусов R_1 и R_2. В пересечении горизонтальных проекций параллелей с проекцией прямой *AB* определяются горизонтальные проекции K_1, K_2, K_3, K_4 точек пересечения.

Фронтальные проекции точек пересечения находятся при помощи линий связи. Так как поверхность тора представляет собой поверхность 4-го порядка, то прямая имеет в общем случае четыре точки пересечения.

При определении видимости участков проекций прямой руководствуемся тем, что фронтальные проекции точек K_1, K_2, K_3 расположены на невидимой части поверхности кругового кольца.

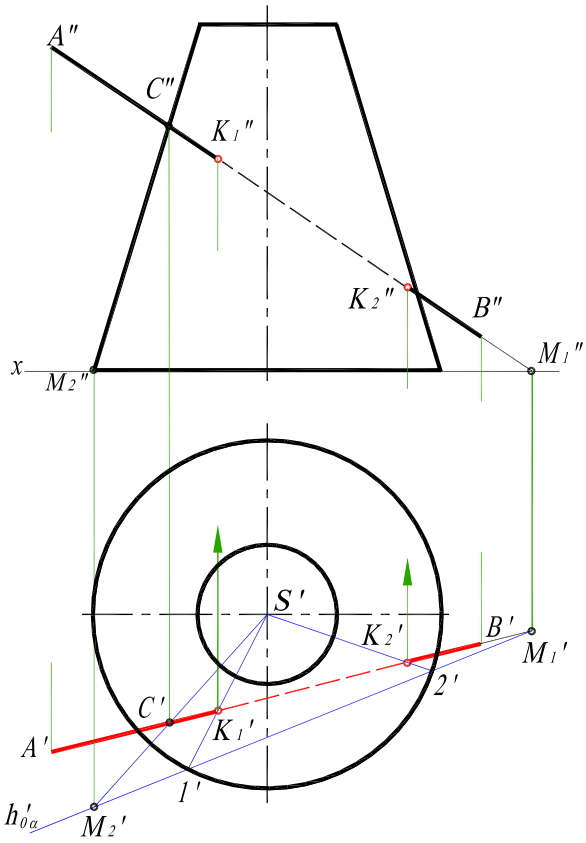


Рис. 9.14

Задача 2. Построить точки пересечения прямой *AB* с поверхностью усеченного конуса (рис. 9.14).

Решение. Так как фронтальную проекцию вершины конуса нельзя построить (построения выходят за рамки чертежа), то принимаем очерковую образующую конуса за фронтальную проекцию вспомогательной прямой, проходящей через вершину конуса. Обозначив точку ее пересечения с проекцией *AB* точкой *C*, находим на горизонтальной проекции *AB* проекцию *C′* и проводим горизонтальную проекцию *S′C′* вспомогательной прямой *SC*. Пересекающиеся прямые *AB* и *SC* образуют плоскость, пересекающую конус по образующим. Находим ее горизонтальный след $h_{0\alpha}'$ на плоскости основания конуса, построив горизонтальные следы M_1 и M_2 прямой *AB* и вспомогательной прямой. След $h_{0\alpha}'$ пересекает окружность основания конуса в точках 1 и 2. Пересечение проекций образующих *S*1 и *S*2 с проекцией *AB* определяет горизонтальные проекции K_1 и K_2 точек пересечения.

По линиям связи получаем фронтальные проекции точек K_1, K_2.

Видимость участков проекции отрезка AB определяем из того, что точки пересечения расположены на видимых частях проекций конуса.

9.4. Вопросы для контроля

1. При каких условиях рассматриваются частные случаи пересечения прямой с поверхностью геометрических тел?
2. Как построить точки пересечения прямой с поверхностью в частном случае?
3. В чем состоит общий способ определения точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел?
4. Как проводится вспомогательная плоскость при пересечении конуса прямой линией общего положения, чтобы получить в сечении конуса прямые линии?
5. С помощью каких преобразований можно упростить задачу построения точек пересечения прямой общего положения со сферой?