

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н. И. Жарков, А. Л. Калтыгин, Ю. Н. Мануков

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для
студентов технических специальностей*

Минск 2010

ЛЕКЦИЯ 2

Глава 3. ПЛОСКОСТЬ

3.1. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости

Плоскостью называется поверхность, образуемая перемещением прямой линии, которая движется параллельно самой себе по неподвижной направляющей прямой.

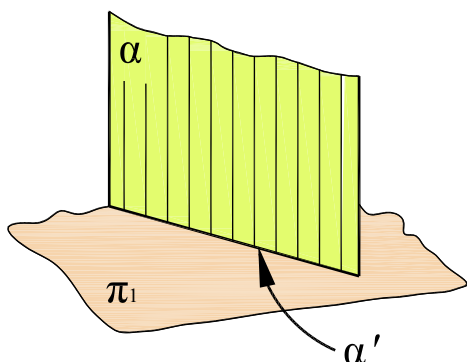


Рис. 3.1

На чертеже плоскость можно изобразить только в том случае, если она проецируется в линию. На рис. 3.1 плоскость α , расположенная перпендикулярно к плоскости π_1 , проецируется на нее прямой линией α' .

Если плоскость не перпендикулярна к плоскости проекций, то изобразить ее на чертеже невозможно, так как проекции плоскости на каждую плоскость проекций π_1, π_2, π_3 занимают полностью всю плоскость проекций. Однако ее можно задать на чертеже, изобразив какие-либо элементы, определяющие ее. Такими элементами являются:

- проекции трех точек, не лежащие на одной прямой (рис. 3.2, а);
- проекции прямой и точки, не лежащей на ней (рис. 3.2, б);
- проекции пересекающихся прямых (рис. 3.2, в);
- проекции двух параллельных прямых (рис. 3.2, г);
- проекции плоских фигур (рис. 3.2, д).

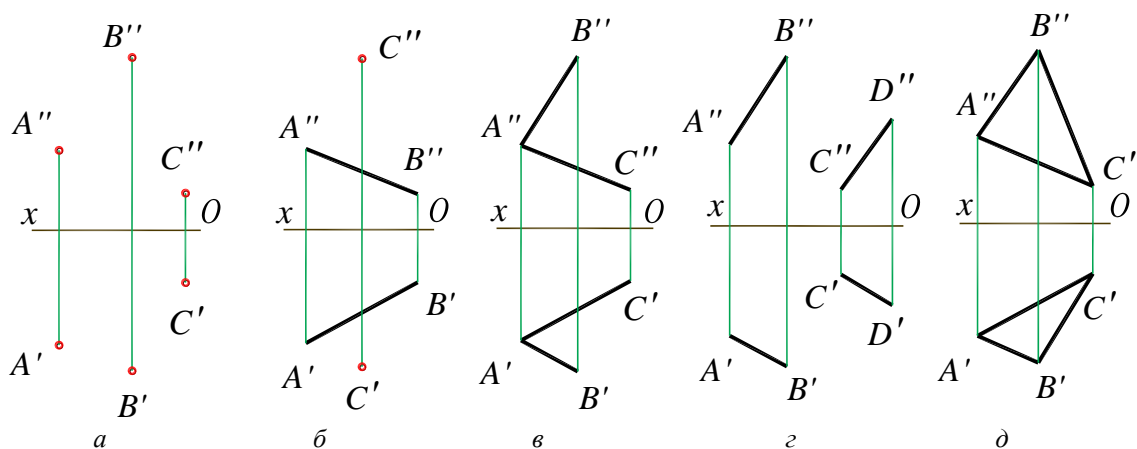


Рис. 3.2

Кроме того, плоскость может быть задана следами плоскости. *Следом плоскости* называется линия пересечения заданной плоскости с любой из плоскостей проекций.

На рис. 3.3, *а* изображена плоскость α , которая пересекается с плоскостями проекций и образует следующие следы:

$h'_{0\alpha}$ – *горизонтальный след* – в пересечении с горизонтальной плоскостью проекций π_1 ;

$f''_{0\alpha}$ – *фронтальный след* – в пересечении с фронтальной плоскостью проекций π_2 ;

$p'''_{0\alpha}$ – *профильный след* – в пересечении с профильной плоскостью проекций π_3 .

На чертеже плоскость задают проекциями следов $h'_{0\alpha}$ и $f''_{0\alpha}$ (рис. 3.3, *б*). Так как следы плоскости расположены на одноименных плоскостях проекций, фронтальная проекция $h'_{0\alpha}$ горизонтального следа и горизонтальная проекция $f''_{0\alpha}$ фронтального следа совпадают с осью x . Проекция следов, которые совпадают с осью координат, на чертеже обычно не указывают.

Два следа плоскости, пересекающиеся на осях координат в точках x_α , y_α , z_α , называют *точками схода следов*. Профильный след $p'''_{0\alpha}$ можно построить по точкам схода, используя линии связи (рис. 3.3, *в*).

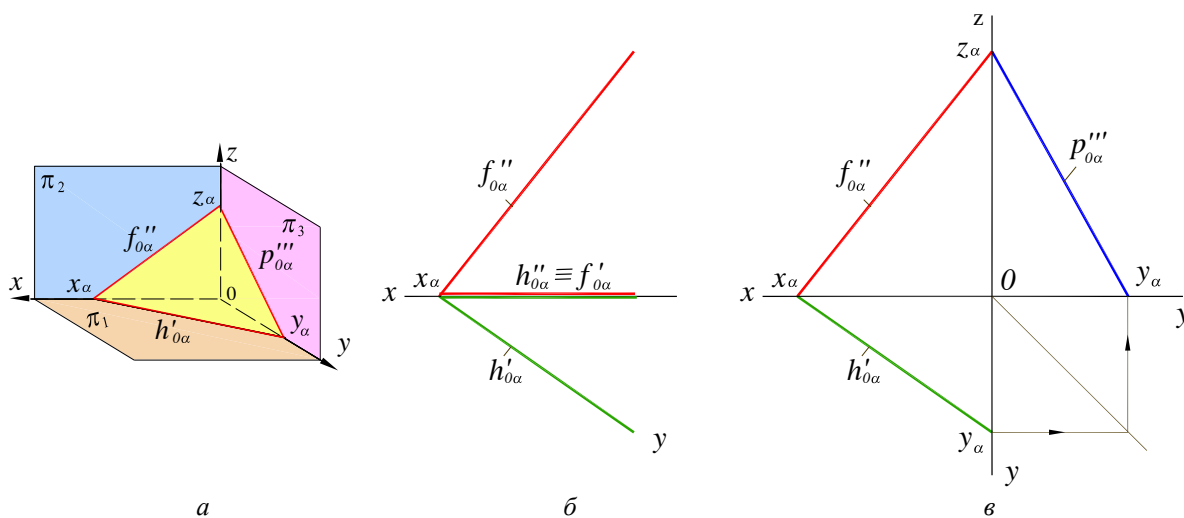


Рис. 3.3

Каждый из приведенных выше способов задания плоскости может быть преобразован в любой из них. Например, соединив точки *A* и *B* (рис. 3.2, *а*), получим задание плоскости, представленное на рис. 3.2, *б*. От задания плоскости прямой и точкой (рис. 3.2, *б*) можно перейти к заданию плоскости двумя пересекающимися прямыми (рис. 3.2, *в*) или двумя параллельными прямыми (рис. 3.2, *г*) или треугольником (рис. 3.2, *д*).

Для построения следов плоскости следует найти следы прямых, принадлежащих данной плоскости. На рис. 3.4, *а* и *в* показана плоскость α , заданная следами.

3.2. Плоскости общего и частного положения

По отношению к плоскостям проекций плоскости могут занимать различное положение. Плоскость, не перпендикулярную ни к одной из плоскостей проекций называют *плоскостью общего положения*. Наглядное изображение плоскости общего положения α дано на рис.3.4, а, чертеж плоскости общего положения α , заданной плоской фигурой, приведен на рис. 3.4, б и чертеж плоскости общего положения α , заданной следами, приведен на рис.3.4, в.

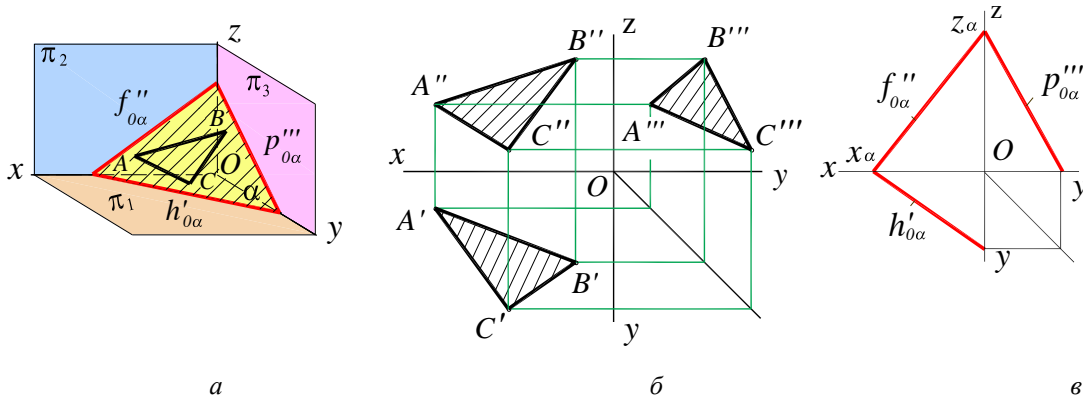


Рис. 3.4

Плоскость общего положения пересекает каждую из осей x , y , z . Следы плоскости общего положения никогда не перпендикулярны к осям проекций. При построении плоскости следами последние обычно ограничиваются участками, расположенными в первом октанте.

К плоскостям *частного положения* относятся плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекций.

Если плоскости перпендикулярны к одной из плоскостей проекций, то они называются *проецирующими*.

Различают горизонтально-проецирующую ($\beta \perp \pi_1$), фронтально-проецирующую ($\gamma \perp \pi_2$) и профильно-проецирующую ($\delta \perp \pi_3$) плоскости. Характерные особенности расположения проецирующих плоскостей приведены в табл. 3.1.

Проецирующие плоскости

Наименование плоскости	Наглядное изображение	Плоскость задана:		Особенности проекции плоскости
		плоской фигурой	следами	
Горизонтально-проецирующая, $\beta \perp \pi_1$				$A'B'C'$ - прямая линия; $f_{0\beta}'' \perp x$, $p_{0\beta}''' \perp y$, φ_2 – угол наклона пл. β к π_2
Фронтально-проецирующая, $\gamma \perp \pi_2$				$D'E'F'$ - прямая линия; $h_{0\gamma}' \perp x$, $p_{0\gamma}''' \perp z$, φ_1 – угол наклона пл. γ к π_1
Профильно-проецирующая, $\delta \perp \pi_3$				$K'L'M'$ - прямая линия; $h_{0\delta}' \parallel x$, $f_{0\delta}'' \parallel z$, φ_1 – угол наклона пл. δ к π_1 , $\varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1$

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций называются *плоскостями уровня*.

Плоскости уровня, являясь проецирующими, одновременно параллельны одной из плоскостей проекций.

К ним относятся:

1. *Горизонтальная плоскость* – параллельная плоскости проекций π_1 и перпендикулярная плоскостям π_2 и π_3 ;
2. *Фронтальная плоскость* – параллельная плоскости π_2 и перпендикулярная плоскостям π_1 и π_3 ;
3. *Профильная плоскость* – параллельная плоскости π_3 и перпендикулярная плоскостям π_1 и π_2 .

Характерные особенности расположения проекций плоскостей уровня приведены в табл. 3.2.

Плоскости частного положения (проецирующие плоскости и плоскости уровня) обладают *собирательным свойством*: все геометрические образы, которые принадлежат плоскости, проецируются на плоскость проекций, которой заданная плоскость перпендикулярна, в линию, называемую *следом-проекцией*.

Таблица 3.2

Плоскости уровня

Наименование плоскости	Наглядное изображение	Плоскость задана:		Особенности проекции плоскости
		плоской фигурой	следами	
Горизонтальная, $\alpha \parallel \pi_1$				α'' и $\alpha''' \perp z$ Плоскость имеет две вырожденные проекции – фронтальную и профильную
Фронтальная, $\beta \parallel \pi_2$				$\beta'' \parallel x, \beta''' \parallel z$ Плоскость имеет две вырожденные проекции – горизонтальную и профильную
Профильная, $\gamma \parallel \pi_3$				γ'' и $\gamma''' \perp x$ Плоскость имеет две вырожденные проекции – горизонтальную и фронтальную

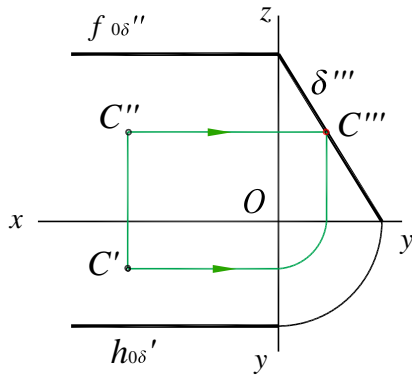


Рис. 3.5

Например, если точка C расположена в профильно-проецирующей плоскости δ , то ее профильная проекция находится на профильном следе – проекции δ''' (рис. 3.5).

Плоскости частного положения находят широкое применение в качестве вспомогательных элементов при решении различных задач начертательной геометрии, а также используются в техническом черчении при построении разрезов и сечений на чертежах.

3.3. Прямая и точка в плоскости

К числу основных задач, решаемых на плоскости, относят: проведение прямой в плоскости, построение недостающей проекции точки, проверка принадлежности точки плоскости.

Решение этих задач основано на известных положениях геометрии:

1. *Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.*

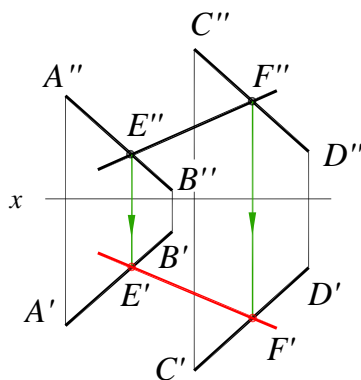


Рис. 3.6

Например, плоскость задана параллельными прямыми AB и CD (рис. 3.6). Требуется построить горизонтальную проекцию $E'F'$ прямой EF , лежащей в этой плоскости, если известна ее фронтальная проекция $E''F''$.

Прямые AB , CD , EF лежат в одной плоскости, поэтому точки E и F являются точками пересечения соответственно прямых AB и EF и CD и EF . По линиям связи определяем горизонтальные проекции точек F и E . Через проекции точки E' и F' проводим горизонтальную проекцию прямой.

2. *Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку этой плоскости параллельно какой либо прямой, лежащей в этой плоскости.*

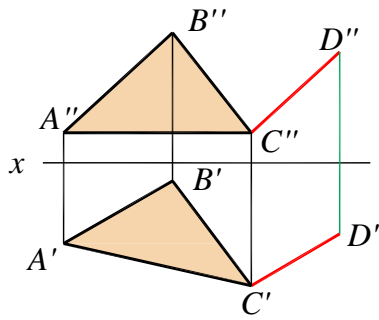


Рис. 3.7

Например, плоскость задана треугольником ABC (рис. 3.7). Требуется построить прямую, лежащую в плоскости ABC и проходящую через точку C . Через точку C проводим прямую CD , параллельную AB ($C'D' \parallel A'B'$, $C''D'' \parallel A''B''$).

Следует отметить, что через точку C в плоскости треугольника можно провести множество прямых.

3. Если плоскость задана на чертеже следами, то прямая принадлежит плоскости, если следы прямой лежат на одноименных следах плоскости или если она параллельна одному из следов плоскости, а с другим имеет общую точку.

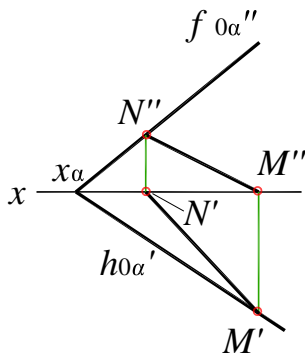


Рис. 3.8

Например, прямая MN принадлежит плоскости α (рис. 3.8), поэтому горизонтальный след M' прямой лежит на горизонтальном следе $h_{0\alpha'}$ плоскости α , а фронтальный след N'' прямой – на фронтальном следе $f_{0\alpha''}$ плоскости α .

Из вышеизложенного вытекает, что для определения следов плоскости достаточно найти следы прямых, определяющих данную плоскость. Через одноименные следы прямых пройдут соответствующие следы плоскости.

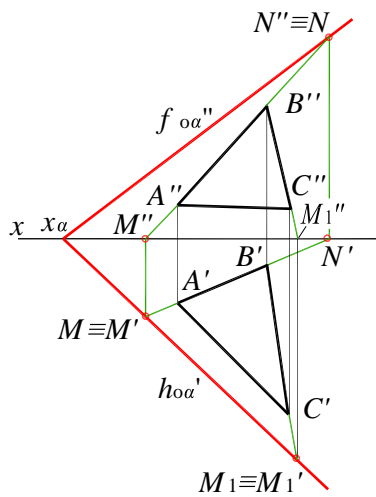


Рис. 3.9

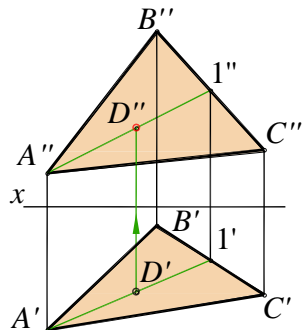


Рис. 3.10

Например, необходимо построить следы плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.9).

Определим горизонтальный след прямой AB . Для этого продолжаем фронтальную проекцию $A''B''$ до пересечения с осью x и находим фронтальную проекцию M'' горизонтального следа. В пересечении линии связи и продленной проекции $A'B'$ находим точку M' – горизонтальную проекцию горизонтального следа, который совпадает с горизонтальным следом M прямой AB . Аналогично находим точку M_1' – горизонтальную проекцию горизонтального следа прямой BC . Соединив полученные точки M' и M_1' , проводим горизонтальный след $h_{0\alpha'}$.

В пересечении $h_{0\alpha'}$ с осью x получим точку схода следов x_{α} . Затем определим фронтальный след отрезка AB – точку $N'' \equiv N$. Соединив точку N'' с точкой x_{α} , получим фронтальный след $f_{0\alpha''}$ плоскости треугольника ABC .

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей плоскости. Например, необходимо определить фронтальную проекцию точки D , принадлежащей плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.10). Через точку D' проведем горизонтальную проекцию прямой $A'1'$ и построим $A''1''$. Проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой $A1$. По линии связи находим фронтальную проекцию D'' точки D .

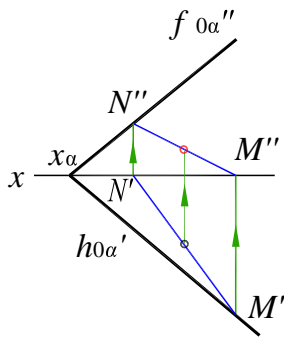


Рис. 3.11

На рис. 3.11 показано построение недостающей фронтальной проекции точки, принадлежащей плоскости α , заданной следами. Через заданную проекцию A' проводим произвольную прямую общего положения, которая пересекает ось x в точке N' , а след $h_{0\alpha}'$ – в точке M' . Из условия принадлежности прямой MN плоскости α находим фронтальную проекцию $M''N''$, на которой находится фронтальная проекция A'' .

3.4. Прямые особого положения в плоскости

К числу прямых, занимающих особое положение в плоскости, относятся *горизонтали, фронталы, профильные линии и линии наибольшего наклона*.

Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 , называется *горизонталью* плоскости. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x .

Для построения проекций горизонтали плоскости треугольника ABC (рис. 3.12) проводим через фронтальную проекцию вершины C фронтальную проекцию горизонтали $C''D'' \parallel Ox$, а затем по линиям связи строим ее горизонтальную проекцию $C'D'$. Горизонтальный след плоскости является одной из ее горизонталей (нулевая горизонталь). Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси x .

Если плоскость задана следами (рис. 3.13), то построение горизонтали можно начинать как с фронтальной проекции, параллельной оси x , так и с горизонтальной, которая параллельна горизонтальному следу плоскости.

При построении горизонтали плоскости α (рис. 3.13) учтено, что следы прямых, лежащих в плоскости, расположены на одноименных следах плоскости. Поэтому, проведя горизонтальную проекцию горизонтали $h' \parallel h_{0\alpha}'$, определяем горизонтальную проекцию N' , а затем фронтальную проекцию $N'' \equiv N$ фронтального следа горизонтали. Фронтальная проекция $h'' \parallel x$.

Прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций π_2 , называется *фронталью* плоскости. Горизонтальная проекция фронталы параллельна оси x .

На рис. 3.14 построение фронталы плоскости треугольника ABC начато с ее горизонтальной проекции $A'K' \parallel x$, а затем построена ее фронтальная проекция $A''K''$.

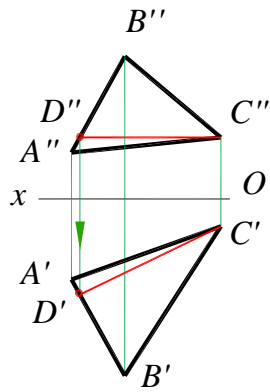


Рис. 3.12

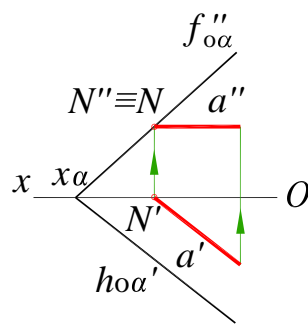


Рис. 3.13

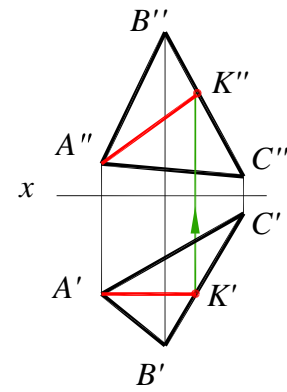


Рис. 3.14

При задании плоскости следами построение фронталей можно начинать как с горизонтальной проекции, параллельной оси x , так и с фронтальной, которая параллельна фронтальному следу плоскости.

На рис. 3.15 показано построение фронталей f плоскости β . Вначале проведена ее горизонтальная проекция $f' \parallel x$, а затем построена фронтальная проекция f'' , которая проходит через точку M'' – фронтальную проекцию горизонтального следа фронталей.

Профильной прямой плоскости называется прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная профильной плоскости проекций π_3 .

На рис. 3.16 представлено построение профильной прямой BD плоскости треугольника ABC . Горизонтальная проекция $B'D' \parallel Oy$, фронтальная $B''D'' \parallel Oz$. Профильная проекция $B'''D'''$ находится с помощью линий связи.

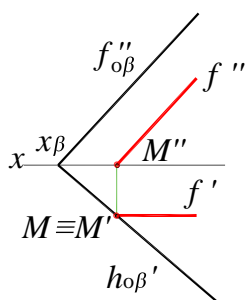


Рис. 3.15

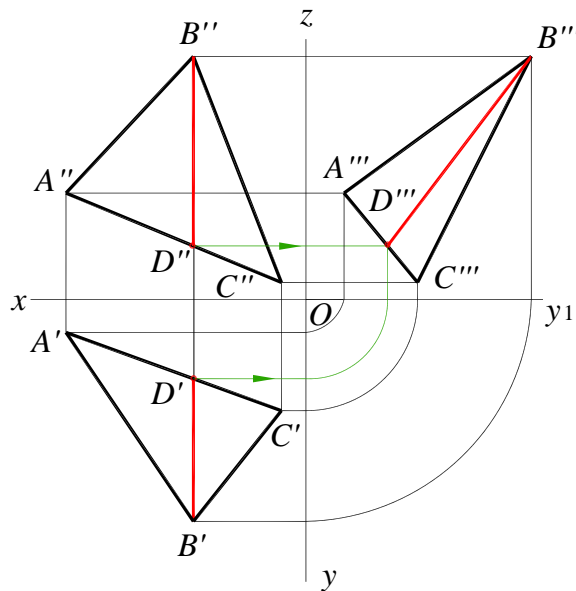


Рис. 3.16

Прямая, принадлежащая данной плоскости и перпендикулярная к ее линиям особого положения, называется *линией наибольшего наклона плоскости*.

В плоскости различают линии наибольшего наклона:

- а) относительно горизонтальной плоскости проекций π_1 ;
- б) относительно фронтальной плоскости проекций π_2 ;
- в) относительно профильной плоскости проекций π_3 .

Линия наибольшего наклона к плоскости π_1 называется *линией ската* плоскости.

Если плоскость задана треугольником ABC (рис. 3.17), линия наибольшего наклона этой плоскости относительно плоскости π_1 (линия ската) определяется при помощи вспомогательной горизонтали CE , проведенной через точку C этого треугольника. Горизонтальную проекцию $B'D'$ линии наибольшего наклона проводим через B' перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали ($B'D' \perp C'E'$), а фронтальную проекцию – через проекцию B'' и проекцию D'' , построенную по точке D' с помощью линии связи.

Если плоскость задана следами (рис. 3.18), горизонтальная проекция линии наибольшего наклона к π_1 перпендикулярна горизонтальному следу плоскости ($M'N' \perp h_{0\alpha}'$).

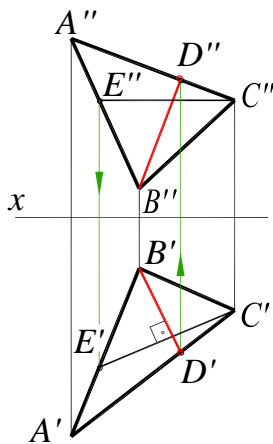


Рис. 3.17

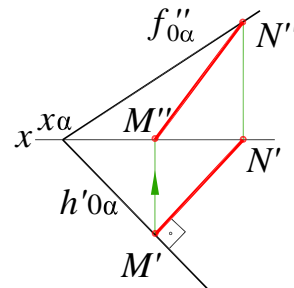


Рис. 3.18

Линия ската может служить для определения угла наклона плоскости к плоскости проекций π_1 . Аналогично линии наибольшего наклона к плоскостям π_2 и π_3 служат для определения углов между этой плоскостью и плоскостями проекций π_2 и π_3 .

3.5. Примеры решения задач

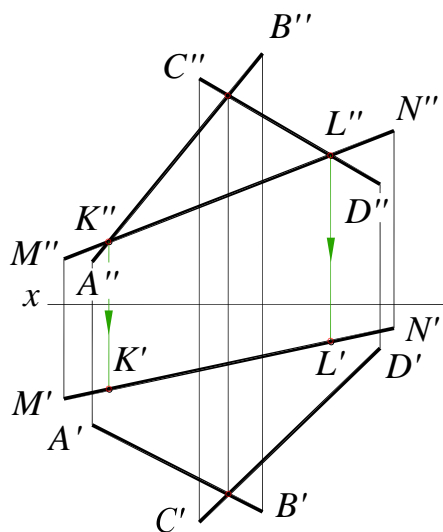


Рис. 3.19

Задача 1. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми AB и CD . Определить, лежит ли прямая MN в этой плоскости (рис. 3.19).

Решение. Обозначим точки пересечения фронтальных проекций прямых AB и MN через K'' и прямых CD и MN через L'' . Построим их горизонтальные проекции – точки K' и L' на горизонтальной проекции прямой $M'N'$. Из построений видно, что точки K ($K'K''$) и L ($L'L''$), принадлежащие прямой MN , не лежат в плоскости пересекающихся прямых AB и CD . Значит, прямая MN не лежит в заданной плоскости.

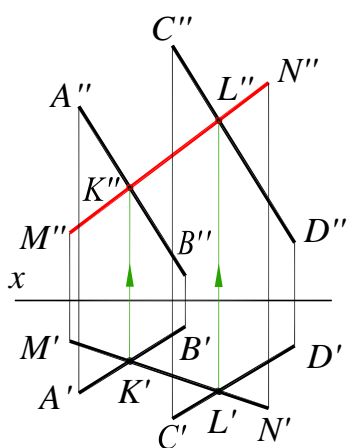


Рис. 3.20

Задача 2. Построить фронтальную проекцию отрезка прямой MN , принадлежащую плоскости, заданной двумя параллельными прямыми AB и CD (рис. 3.20).

Решение. Обозначим горизонтальные проекции точек пересечения прямой MN с прямыми AB и CD соответственно K' и L' . По линиям связи определяем их фронтальные проекции K'' и L'' и проводим искомую проекцию $M''N''$.

3.6. Вопросы для контроля

1. Как можно задать плоскость на чертеже?
2. Что такое следы плоскости?
3. Какая плоскость называется плоскостью общего положения?
4. Какая плоскость называется проецирующей?
5. Какая плоскость называется плоскостью уровня?
6. Как построить точку в плоскости общего положения?
7. Как проверить, принадлежит ли точка плоскости?
8. Какие линии в плоскости называются горизонталями, фронталями и профильными прямыми?
9. Что называется линией наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций?